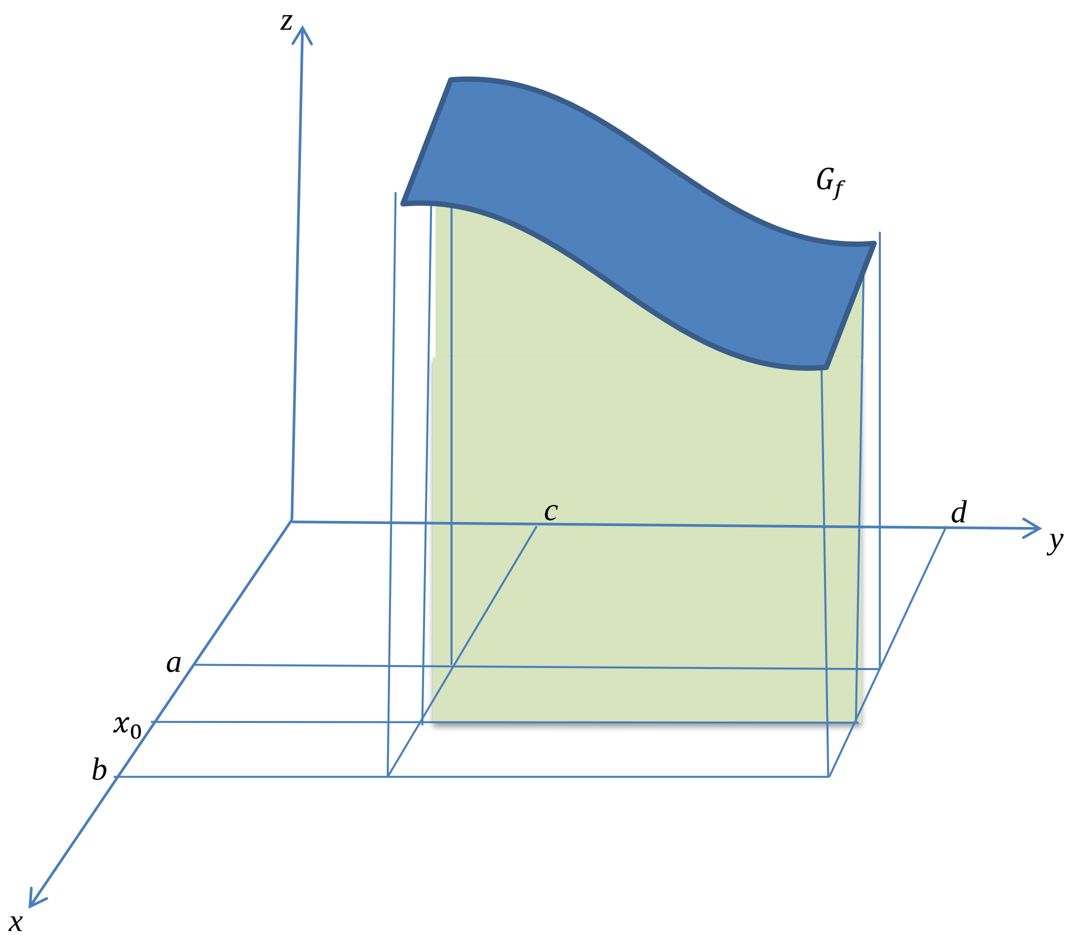
Capítulo VII

Integración múltiple

Integrales iteradas

La definición de integral de Riemann de una función acotada y no negativa f en un intervalo cerrado $[a, b]$ calcula el área de la región del plano que se encuentra bajo la gráfica de f y que se proyecta verticalmente sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces es natural preguntarse de qué manera pudiéramos calcular el volumen de la región del espacio, que se encuentra bajo la gráfica de una función acotada y no negativa f definida en un intervalo bidimensional (rectángulo) $I = [a, b] \times [c, d]$.

Para responder a esta pregunta, además supondremos que nuestra función f es continua en el intervalo bidimensional I.



Si consideramos $x_0 \in [a, b]$ y definimos la función $\varphi_{x_0}: [c, d] \to \mathbb{R}$, definida por la igualdad $\varphi_{x_0}(y) = f(x_0, y)$, vemos que el área de la región plana que está bajo la gráfica de f y sobre el segmento de recta $\{x_0\} \times [c, d]$, que está sombreada en la figura anterior, está dada por

$$A(x_0) = \int_c^d \varphi_{x_0}(y)dy$$

Como este cálculo se puede realizar para cada $x \in [a, b]$, podemos definir una función $A: [a, b] \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$A(x) = \int_c^d \varphi_x(y)dy$$

Entonces, el volumen bajo la gráfica de f y sobre el rectángulo I es

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi_x(y)dy \right) dx$$

Por lo tanto, este volumen se puede expresar de la siguiente manera:

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Esta última expresión en que aparecen dos integrales, en la cual, para hallar el resultado, debemos calcular primero la integral que está en el interior, para obtener una función de una variable, que se integrará a continuación, se llama *integral iterada*. Este tipo de integrales también existe para funciones de tres y más variables.

Desde luego que si fijamos $y_0 \in [c, d]$ y definimos la función $\varphi_{y_0}: [a, b] \to \mathbb{R}$ por la igualdad $\varphi_{y_0}(y) = f(x, y_0)$, vemos que el área de la región plana que está bajo la gráfica de f y sobre el segmento de recta $[a, b] \times \{y_0\}$, está dada por

$$B(y_0) = \int_a^b \varphi_{y_0}(x)dx$$

Como este cálculo se puede hacer para cada $y \in [c, d]$, podemos definir una función $B: [c, d] \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$B(y) = \int_a^b \varphi_y(x)dx$$

Entonces, el volumen bajo la gráfica de f y sobre el rectángulo I es

$$V = \int_c^d B(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi_y(x)dx \right) dy$$

Por lo tanto este volumen se puede expresar de la siguiente manera:

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

En este caso se tiene la igualdad de las integrales iteradas

$$\int_c^d \left(\int_a^b \varphi_y(x)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Ejemplo: Hallar el volumen bajo la parte de la gráfica de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ que se proyecta verticalmente sobre el rectángulo $I = [0,1] \times [0,2]$.

Solución: Como f es continua y no negativa sobre el intervalo I, en particular es acotada en ese rectángulo (intervalo bidimensional), entonces, de acuerdo con la argumentación anterior vemos que el volumen requerido es

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx$$

Primero calculamos la integral interior, donde y varía mientras que x permanece constante. Se tiene:

$$A(x) = \int_0^2 (x^2 + y^2)dy = [x^2 y]_0^2 + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{8}{3}$$

Por lo tanto,

$$V = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

Desde luego que si usamos la otra integral iterada para calcular el volumen, debemos encontrar el mismo resultado. Constatémoslo esto en este ejemplo, es decir que

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy$$

En este caso debemos comenzar por calcular la integral interior, en que se supone y es constante en tanto que x es variable. Se tiene:

$$A(x) = \int_0^1 (x^2 + y^2) dx \ = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [y^2 x]_0^1 = \frac{1}{3} + y^2$$

Por lo tanto,

$$V = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

Hay ciertas regiones del plano, sobre las cuales es frecuente calcular integrales iteradas, razón por la cual las definiremos a continuación.

Definición: Si φ_1 y φ_2 son funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y verifican la condición $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Decimos que la región R del plano definida de la siguiente manera

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

es una región de tipo I.

Observación: Para calcular una integral iterada H de una función continua f sobre una región de tipo I, se procede de la siguiente manera:

$$H = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Definición: Si λ_1 y λ_2 son funciones continuas en el intervalo cerrado $[c,d]$ y verifican la condición $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$, para todo $y \in [c,d]$. Decimos que la región R del plano definida de la siguiente manera

$$R = \{(x,y): c \leq y \leq d, \lambda_1(y) \leq x \leq \lambda_2(y)\},$$

es una región de tipo II.

Observación: Para calcular una integral iterada K de una función continua f sobre una región de tipo II, se procede de la siguiente manera:

$$K = \int_c^d \left(\int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Ejemplo: Hallar el volumen bajo la gráfica de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = xy + x^2y$, que se proyecta verticalmente sobre la región acotada del plano xy, que está comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

Solución: Bosquejando esta región podemos ver que se trata de una región de tipo I, donde

$\varphi_1 = x^2$ y $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ son funciones continuas en el intervalo cerrado [0,1] y satisfacen $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, para todo $x \in [0,1]$. En efecto $R = \left\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$.

Entonces el volumen pedido es

$$V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy + x^2y)dy \right) dx$$

Se tiene:

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy + x^2y)dy = \left[(x + x^2)\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(x + x^2)(x - x^4),$$

Por lo tanto $(x^2 - x^5 + x^3 - x^6)$

$$V = \int_0^1 \frac{1}{2}(x + x^2)(x - x^4)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^5 + x^3 - x^6)dx = \frac{23}{168}$$

Observación: La región definida en el ejemplo anterior es también una región de tipo II. Para constatar que nuestros cálculos son correctos, realicemos el cálculo del volumen usando la integral iterada en orden inverso.

En este caso vemos que les funciones $\lambda_1(y) = y^2$ y $\lambda_2(y) = \sqrt{y}$ son continuas en $[0,1]$ y verifican $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$, para todo $y \in [0,1]$. Vemos que el volumen debería ser igual a

$$K = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (xy + x^2 y) dx \right) dy$$

Tenemos:

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (xy + x^2 y) dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) y \right]_{y^2}^{\sqrt{y}} = \left(\frac{y}{2} + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3} \right) y - \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} \right) y$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{y}{2} + \frac{(\sqrt{y})^3}{3} \right) y - \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} \right) y \right) dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{y}{2} + \frac{(\sqrt{y})^3}{3} \right) y - \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} \right) y \right) dy = \left[\frac{y^3}{6} + \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{21} - \frac{y^6}{12} - \frac{y^8}{24} \right]_0^1 = \frac{23}{168}$$

Integrales múltiples

La definición de integral de Riemann de una función acotada *f* en un intervalo cerrado $[a, b]$ puede ser extendida de manera natural para funciones con valores reales, definidas y acotadas en un intervalo *n*- dimensional *I*.

Antes de estudiar esta generalización introduciremos algunos conceptos previos.

Definición: Un intervalo *n* – dimensional I de $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de *n* intervalos en $\mathbb{R}$, es decir $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, donde I_1 , I_2 , … ., I_n son intervalos en $\mathbb{R}$.

Definición: La medida $v(I)$ de un intervalo n – dimensional, acotado, $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$ es el producto de las longitudes de los intervalos I_1 , I_2 , ..., I_n de $\mathbb{R}$, es decir

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n),$$

donde a_1 , b_1 , ... , a_n , b_n son respectivamente los extremos de los intervalos I_1 , I_2 , ..., I_n .

Ejemplo:

La medida del intervalo unidimensional $[2,7[$ es $7 - 2 = 5$.

La medida del intervalo bidimensional $[2,4] \times]1,6]$ es $(4-2)(6-1) = 10$.

La medida del intervalo tridimensional $[2,4] \times]1,6] \times]3,5[$ es $(4-2)(6-1)(5-3) = 20$.

Definición: Una partición $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ de un intervalo n – dimensional compacto I de $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de n intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, es decir $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ..., $I_n = [a_n, b_n]$.

Decimos que una partición Q de I es más fina que otra partición P de I si $P \subseteq Q$.

Observación: Si $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ es una partición de un intervalo n – dimensional compacto $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ de $\mathbb{R}^n$ y además, P_1 divide a I_1 en m_1 subintervalos, P_2 divide a I_2 en m_2 subintervalos,…, P_n divide a I_n en m_n subintervalos, entonces P divide a I en $N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ subintervalos n – dimensionales.

Ejemplo: El conjunto P formado por 12 puntos, definido por extensión

$$P = P_1 \times P_2 = \{(1,2), (1,4), (1,5), (1,7), (2,2), (2,4), (2,5), (2,7), (5,2), (5,4), (5,5), (5,7)\}$$

es una partición del intervalo bidimensional $I = I_1 \times I_2$, donde $I_1 = [1,5]$ y $I_2 = [2,7]$, $P_1 = \{1,2,5\}$ y $P_2 = \{2,4,5,7\}$.

Observemos que P_1 divide a I_1 en 2 subintervalos $[1,2]$ y $[2,5]$, P_2 divide a I_2 en 3 subintervalos $[2,4]$, $[4,5]$ y $[5,7]$. Por otra parte, P divide a I en $6 = 2 \cdot 3$ subrectángulos(o intervalos bidimensionales: $J_1 = [1,2] \times [2,4]$, $J_2 = [1,2] \times [4,5]$, $J_3 = [1,2] \times [5,7]$, $J_4 = [2,5] \times [2,4]$, $J_5 = [2,5] \times [4,5]$ y $J_6 = [2,5] \times [5,7]$.

Definición: Dada una función $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida y acotada en el intervalo n – dimensional $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, …., $I_n = [a_n, b_n]$, una partición $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ de I de $\mathbb{R}^n$.

Si I está dividido por P en N subintervalos n–dimensionales J_1, J_2, …., J_N y seleccionamos puntos $\alpha_1 \in J_1$, $\alpha_2 \in J_2$, …., $\alpha_N \in J_N$, decimos que

$S(f, P, \{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i) v(J_i)$ es una suma intermedia de Riemann de *f* con respecto a la partición P y a $\{\alpha_i\}$.

Ejemplo: Si $f: I = [1,5] \times [2,7] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x+y) = x+y$, P es la partición de I definida en el ejemplo anterior y escogemos $\alpha_1 = (\frac{3}{2}, 3)$, $\alpha_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $\alpha_3 = (\frac{3}{2}, 6)$, $\alpha_4 = (3,3)$, $\alpha_5 = (3, \frac{9}{2})$ y $\alpha_6 = (3,6)$, entonces

$$S(f, P, \{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\alpha_i) v(J_i) = \frac{9}{2} \cdot 2 + \frac{8}{2} \cdot 1 + \frac{15}{2} \cdot 2 + 6 \cdot 6 + \frac{15}{2} \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 163$$

Definición: Dada una función $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida y acotada en el intervalo n–dimensional $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, …., $I_n = [a_n, b_n]$, decimos que *f* es integrable según Riemann en *I* si, existe un número real λ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ (que depende de ϵ) tal que, para toda partición $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ de I más fina que P_ϵ y toda selección $\alpha_1 \in J_1$, $\alpha_2 \in J_2$, …., $\alpha_N \in J_N$, donde J_1, J_2, …., J_N son los *N* subintervalos *n*–dimensionales en que *P* divide a *I*, se tiene

$$|S(f, P, \{\alpha_i\}) - \lambda| < \epsilon$$

En este caso decimos que el número real λ es la integral múltiple de f sobre el intervalo I. Se emplea la siguiente notación para la integral

$$\lambda = \int_I f$$

También se emplean las siguientes notaciones $\int_I f(x)dx$, $\int_I f(x_1, \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Cuando $n = 2$ hablamos de integral doble: $\iint_I f(x,y)dxdy$.

Cuando $n = 3$ hablamos de integral triple: $\iiint_I f(x,y,z)dxdydz$

Ejemplos:

1) Toda función constante $f: I = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = k$, para todo $(x, y) \in I$, es integrable según Riemann en *I*, porque existe un número real $\lambda = k(b-a)(d-c)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, para toda partición P de I en N subintervalos bidimensionales y toda selección $\alpha_1 \in J_1$, $\alpha_2 \in J_2$, …., $\alpha_N \in J_N$ se tiene

$$|S(f, P, \{\alpha_i\}) - \lambda| = \left|\sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i) v(J_i) - \lambda\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} k v(J_i) - \lambda\right|$$

$$= \left|k \sum_{i=1}^{N} v(J_i) - \lambda\right| = |k(b-a)(d-c) - \lambda| = 0 < \epsilon$$

Además:

$$\iint_I k dxdy = k(b-a)(d-c)$$

2) Si $f: I = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ es constante e igual a k en *I*, salvo en un número finito de puntos de ese intervalo, entonces *f* es integrable según Riemann en *I*, y además

$$\iint_I k dxdy = k(b-a)(d-c)$$

Teorema: Si *f* es continua en un intervalo compacto *I* de $\mathbb{R}^n$, entonces *f* es integrable según Riemann sobre *I.*

Observación: La definición de integral doble está inspirada en el cálculo de volúmenes, y es así que si *f* es una función acotada y no negativa en un intervalo *I* de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\iint_I f(x, y) dxdy$$

calcula el volumen bajo la gráfica de f y sobre el intervalo bidimensional *I*, siempre que dicha integral exista. Como las integrales iteradas también sirven para calcular este volumen, los resultados deberían ser iguales, entonces se espera que el cálculo de una integral doble pueda realizarse mediante integrales iteradas, y que ocurra lo mismo en el caso de varias variables. Sin embargo, esto no siempre es cierto, pero bajo condiciones adecuadas la igualdad es válida. Con respecto a esto se tiene el siguiente teorema conocido como teorema de Fubini.

Teorema (de Fubini): Si $f: I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto I, entonces se tiene:

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ejemplo: En el primer ejemplo de este capítulo hallamos el volumen bajo la parte de la gráfica de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ que se proyecta verticalmente sobre el rectángulo $I = [0,1] \times [0,2]$. Como f es continua en I, entonces por el teorema de Fubini se tiene

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2)dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2)dx \right) dy = \frac{10}{3}$$

Extensión de la definición de integral múltiple a regiones más generales

Para definir la integral múltiple en regiones acotadas más generales $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se escoge un intervalo *n*–dimensional *I* que contenga a la región *A* y se define una función que toma los mismos valores que *f* en A, pero que es igual a cero en $I - A$. Entonces f será integrable en *A* si la nueva función definida como se ha indicado es integrable en *I*. De manera más precisa se tiene la siguiente definición.

Definición: Supongamos que *f* es una función acotada $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que *f* es integrable según Riemann en *A* si existe un intervalo *n*–dimensional *I* tal que $A \subseteq I$ y existe la integral

$$H = \int_I f^*,$$

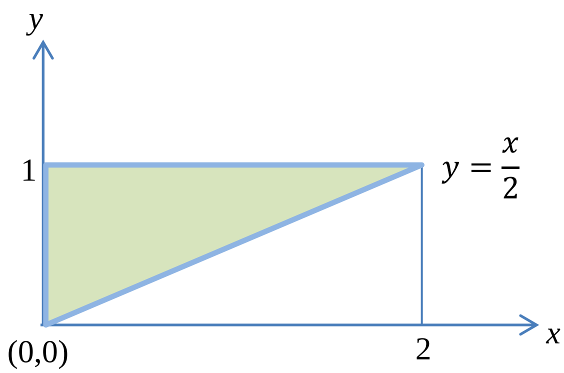
donde $f^*: I \to \mathbb{R}$ es la función que está definida por $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in I - A. \end{cases}$

Si *f* es integrable en *A*, decimos que el número real *H* es la integral de *f* sobre la región *A*, es decir

$$\int_I f = H = \int_I f^*$$

Ejemplo: Hallar $H = \iint_R e^{y^2} dxdy$, donde $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\right\}$.

Solución: La región de integración R que se muestra en ka figura adjunta puede ser considerada como región de tipo I o de tipo II. Si la miramos como región de tipo I entonces tendríamos que la integral doble se calcularía de la siguiente manera:



$$\iint_R e^{y^2} dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{y^2} dy \right) dx$$

Pero no sabemos calcular $\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{y^2} dy$, por lo tanto sería conveniente intentar con la otra integral iterada.

Si miramos a R como región de tipo II, entonces para calcular la integral doble tenemos:

$$\iint_R e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2y} e^{y^2} dx \right) dy$$

Vemos que

$$\int_0^{2y} e^{y^2} dx = 2ye^{y^2}.$$

Por lo tanto

$$\iint_R e^{y^2} dxdy = \int_0^1 2ye^{y^2} dy = \left[e^{y^2}\right]_0^1 = e - 1$$

Observación: Este ejemplo muestra que en cuanto a dificultad no da lo mismo calcular una u otra integral iterada, más aún a veces, como ocurre en este caso, es posible realizar los cálculos con una integral iterada, mientras que con la otra es imposible.

Área y volumen de una región acotada

Si C es un paralelepípedo recto rectangular entonces su volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura, lo mismo ocurre con un cilindro circular recto. Si el paralelepípedo o el cilindro tienen altura unitaria, entonces el volumen y el área de la base coinciden, este hecho motiva la siguiente definición.

Definición: Si C es una región acotada del espacio $\mathbb{R}^n$, el volumen n – dimensional de C se define de la siguiente manera

$$v(C) = \int_C 1\ dx$$

siempre que la integral exista.

Ejemplos:

1) El volumen 1–dimensional o longitud de un intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es

$$v(I) = \int_{[a,b]} 1\ dx = \int_a^b 1\ dx = b - a$$

2) El volumen 2–dimensional o área de un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ es

$$v(R) = \iint_R 1\ dxdy = (b - a)(d - c)$$

3) El volumen 3–dimensional o tridimensional de un intervalo tridimensional $I = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \subseteq \mathbb{R}^3$ es

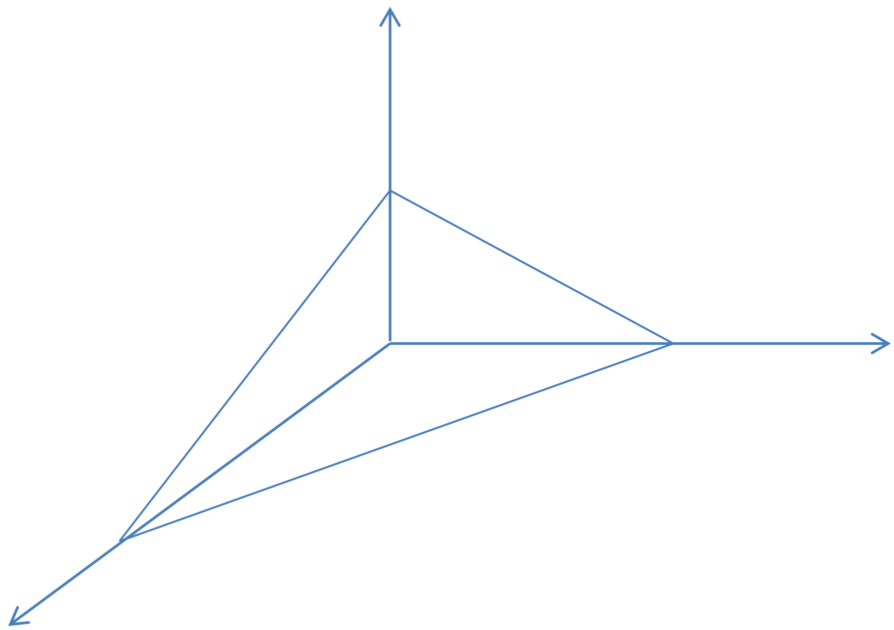
$$v(I) = \iiint_I 1\ dxdydz = (b - a)(d - c)(q - p)$$

4) El área de la región acotada R del plano, limitada por las parábolas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ es

$$v(R) = \iint_R 1\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1dy \right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

5) Hallar el volumen del sólido S acotado del espacio tridimensional ubicado en el primer octante, limitado por los planos coordenado y por el plano cuya ecuación es $2x + 3y + 4z = 12$.

Solución: La ecuación del plano puede ser escrita en la forma $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3}$ =1, por lo tanto este plano intersecta a los ejes coordenados en los puntos $(6,0,0), (0,4,0)$ y $(0,0,3)$. Por lo tanto el sólido es un tetraedro como se muestra en la figura adjunta.



El volumen de este sólido está dado por la siguiente integral

$$v(S) = \iiint_S 1 \ dxdydz = \int_0^6 \left(\int_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(\int_0^{3-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y} 1 \ dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(3 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy \right) dx = \int_0^6 \left[3y - \frac{1}{2}xy - \frac{3}{8}y^2 \right]_0^{4-\frac{2}{3}x} dx$$

$$= \int_0^6 \left\{ 3(4 - \frac{2}{3}x) - \frac{1}{2}x(4 - \frac{2}{3}x) - \frac{3}{8}(4 - \frac{2}{3}x)^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^6 \left\{ 12 - 2x - 2x + \frac{1}{3}x^2 - 6 + 2x - \frac{1}{6}x^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^6 \left\{ 6 - 2x + \frac{1}{6}x^2 \right\} dx = \left[6x - x + \frac{1}{18}x^3 \right]_0^6 = 42$$

Integrales de línea