INTRODUCCIÓN

Estas notas contienen las nociones básicas de Álgebra Lineal que se estudian en el curso de Matemáticas III, que se dicta para las carreras de las áreas de Biología y Química. Se pretende dar a conocer ciertas nociones básicas a través de ejemplos y ejercitación, de manera que éstas surjan de manera natural en la mente de los estudiantes y como necesarias en la resolución de problemas.

Desde luego que no es posible alcanzar un dominio razonable de estas materias sin comprender cuales son las propiedades fundamentales que relacionan estos conceptos básicos; pero entonces es necesario escribir los teoremas que dan cuenta de esas conexiones. Por lo tanto, se presenta la problemática en relación con las demostraciones de dichos teoremas. De manera más precisa, si es necesario incluir las demostraciones de cada afirmación. A mi parecer, hay varias respuestas posibles, que dependen de la orientación que se quiera dar al estudio de las matemáticas para esas carreras; sin embargo, pienso que hay algunas demostraciones que deben ser incluidas de todas maneras, debido a que sustentan los conceptos que se estudiarán posteriormente o porque son de carácter formativo para el alumno, por ejemplo, por el razonamiento que involucra su demostración. Por otra parte, debido a que este curso contiene una enorme cantidad de materias que debe aprender el estudiante, sería imposible dedicarse a demostrar cada resultado importante.
Por las razones expuestas en el párrafo anterior he decidido incluir solamente las demostraciones que considero útiles para la comprensión de ciertos conceptos o porque incluyen razonamientos que se repiten sistemáticamente o que se aplican en la resolución de problemas.

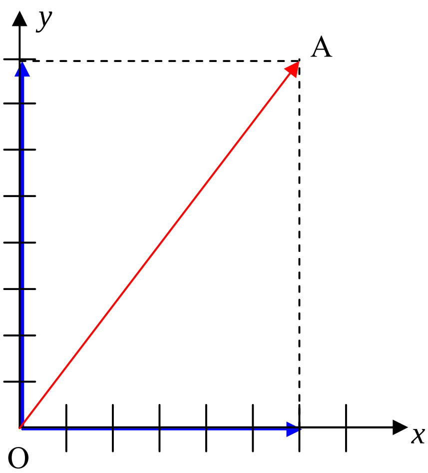
La manera como se entregan los conocimientos a través de esta notas es diferente a como se realiza un curso formal de matemáticas para formar licenciados en matemáticas o física. Pudieran ser calificadas como pobres en su contenido; sin embargo, creo que son ricas en otro sentido “descubrir como surgen algunas nociones y definiciones del Álgebra Lineal”. En consecuencia, me parece recomendable que tengan acceso a estas notas los alumnos de las carreras de las áreas de Matemática y Física, en especial quienes estudian Ciencias Exactas con el prepósito de llegar a ser profesores, debido a que en estas pueden encontrar ciertas estrategias didácticas que les serán útiles posteriormente en el trabajo cotidiano con sus alumnos de enseñanza media.

Para ejemplificar lo que se acaba de decir, podemos mencionar el producto cruz o producto vectorial de dos vectores en el espacio tridimensional, el cual se define después resolver el problema de encontrar un vector que sea perpendicular a dos vectores dados y seleccionar entre las infinitas soluciones una que sea “canónica”. También es posible mencionar la noción de espacio vectorial, la cual se introduce después de mostrar muchos ejemplos de conjuntos provistos de dos operaciones que poseen las mismas propiedades que tienen las operaciones de suma y ponderación de vectores en el plano. Un tercer ejemplo se refiere al método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de operaciones elementales de matrices rectangulares, el cual surge de manera natural a partir del método de reducción que se emplea en la enseñanza media para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

CAPÍTULO I

VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

§ 1. Vectores en el plano y en el espacio



Un bote avanza a velocidad constante de 8 km/h en dirección perpendicular a la orilla del río, pero la corriente lo desplaza a una velocidad de 6 km/h en el sentido de las aguas.
Estas velocidades pueden ser representadas en el plano cartesiano mediante dos flechas, una de 8 unidades de longitud en el sentido positivo del eje de las abscisas y otra de 6 unidades de longitud en el sentido positivo del eje de las ordenadas, como se puede apreciar en la figura adjunta.
La velocidad resultante puede ser representada por la flecha que une el origen O con el punto A = (6,8) de coordenadas 6 y 8, como muestra la figura adyacente.
Esta velocidad que hemos representado a través de la flecha $\overrightarrow{OA}$, no puede ser caracterizada solamente por un número real.
¿Qué datos son suficientes para caracterizar $\overrightarrow{OA}$?

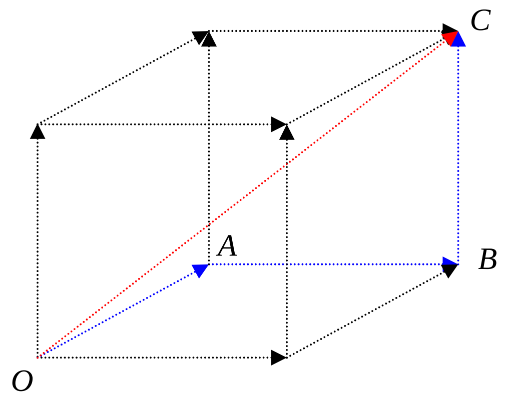
Esta flecha queda determinada a partir de tres datos:

- Por su longitud o módulo, que en este caso es igual a diez unidades.
- Por su dirección, que está definida por la recta que pasa por los puntos *O* y *A*.
- Por su sentido, desde *O* hacia *A*.

Observemos que las coordenadas del punto A: 6 unidades de longitud en el eje x representa el módulo de la velocidad de 6 km/h en ese eje, y 8 unidades de longitud en el eje y representa el módulo de la velocidad de 8 km/h en ese eje, mientras que la longitud 10 representa el módulo de la velocidad resultante de 5 km/h. Observar que esta última longitud puede ser calculada usando el teorema de Pitágoras.

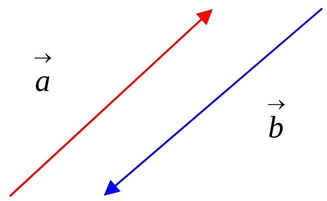
Se puede apreciar que estas representaciones mediante flechas involucran tres datos, pero que también éstos están determinados por las dos coordenadas del punto *A*.

También es posible emplear representaciones sagitales en el espacio tridimensional. Examinemos un ejemplo:



En una pieza cúbica de un metro de lado una hormiga avanza siguiendo la trayectoria *OABC*.
Entonces, su desplazamiento puede ser representado por *la flecha cuyo punto inicial es O y cuyo extremo es C*.
¿De cuántos metros fue su desplazamiento?
Aplicando 2 veces el teorema de Pitágoras se verifica que es de $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ m .

Este desplazamiento es una magnitud que no queda completamente definida a través de un número; además es necesario conocer su dirección y su sentido. Estas magnitudes reciben el nombre de **magnitudes vectoriales** y se representan a través de una flecha. Nos referiremos a **magnitudes escalares** cuando estas puedan representarse por un simple número.

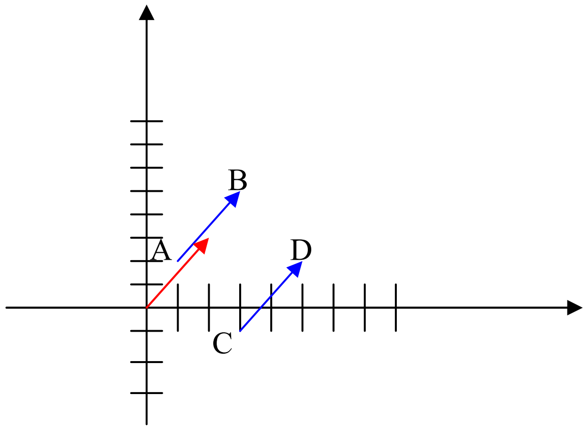


Estos vectores tienen la misma longitud, la misma dirección y sentido opuesto.

Diremos que dos flechas son equivalentes o **equipolentes** si tienen igual longitud, dirección y sentido. En tal caso decimos que representan a un mismo vector.

Si estamos de acuerdo en que representaremos las magnitudes vectoriales en el plano mediante flecha cuyo punto inicial coincide con el origen de coordenadas, nos damos cuenta que para determinar una de tales flechas es suficiente conocer su punto terminal, es decir, la punta de la flecha. ¿Pero como determinamos este último punto? Bueno.... usando nuestras antiguas coordenadas, de manera que podemos identificar un vector en el plano con un par ordenado de números reales.

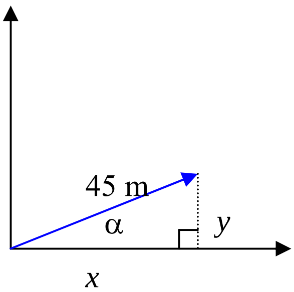
En lo que sigue denotaremos los vectores del plano mediante una letra minúscula con una flecha encima. Por ejemplo $\vec{a} = (2,5)$ y $\vec{b} = (-3,4)$ son vectores del plano. Diremos que 2 y 5 son las coordenadas de $\vec{a}$**,** mientras que –3 y 4 son las del vector $\vec{b}$.



Observemos que las flechas de color azul $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ que unen A = (1, 2) con B = (3, 5) y C = (3, –1) con D = (5, 2), son equivalentes a la flecha en rojo $\vec{a} = (2,3)$ cuyo punto inicial coincide con el origen del sistema de coordenadas.

Se aprecia que todas las flechas equivalentes nos permiten encontrar las coordenadas de aquella que tiene su punto inicial en el origen de coordenadas, simplemente restando las coordenadas del punto final con las del punto inicial.

Ejercicio resuelto: El desplazamiento de un móvil que parte del origen en dirección noreste formando un ángulo de 30° con la horizontal es de 45 m. Encuentre las coordenadas del vector desplazamiento de dicho móvil.
Solución: En la figura adjunta representamos por x e y las coordenadas del vector desplazamiento, por lo tanto, de las definiciones de seno y coseno del ángulo α del triángulo rectángulo de catetos x e y se tiene:



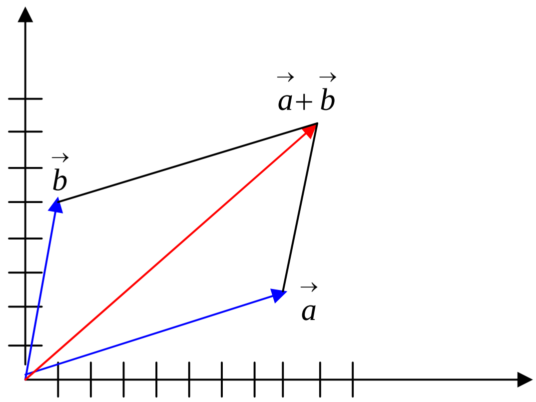
$$\cos 30° = \frac{x}{45} \quad \Rightarrow \quad x = 45\cos 30° = 45\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{2}\ \text{m}$$
$$\operatorname{sen} 30° = \frac{y}{45} \quad \Rightarrow \quad y = 45\operatorname{sen} 30° = 45\cdot\frac{1}{2} = \frac{45}{2}\ \text{m}$$

Entonces las coordenadas del vector desplazamiento expresadas en metros son $\frac{45\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{45}{2}$.

En el primer ejemplo de esta sección intervenían dos velocidades que hemos tenido que *sumar* de alguna manera para calcular su resultante. A la flecha azul horizontal se le puede asignar el par ordenado (6, 0) y a la flecha azul vertical el par (0,8). Si tenemos presente que la resultante es la diagonal del rectángulo y que tenía componentes 6 y 8, es decir, la suma de las componentes de ambas flechas azules, surge de manera natural la definición de suma de vectores.

Definición La suma de los vectores del plano $\vec{a} = (p,q)$ y $\vec{b} = (r,s)$ es el vector

$$\vec{a}+\vec{b} = (p+r, q+s)$$



Por ejemplo, en la figura adyacente, si sumamos los vectores $\vec{a} = (8,2)$ y $\vec{b} = (1,5)$ (en azul), su suma o resultante tiene coodenadas 9 y 7, y podemos ver que corresponde a la diagonal del paralelógramo cuyos lados son $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Observamos que para obtener la suma de dos vectores en el plano es suficiente copiar el segundo vector a continuación del primero, es decir, con su origen coincidiendo con el extremo del primer vector y unir el origen del primero con el extremo del segundo. Se obtiene exactamente la diagonal del paralelógramo que determinan los dos vectores sumandos dados.

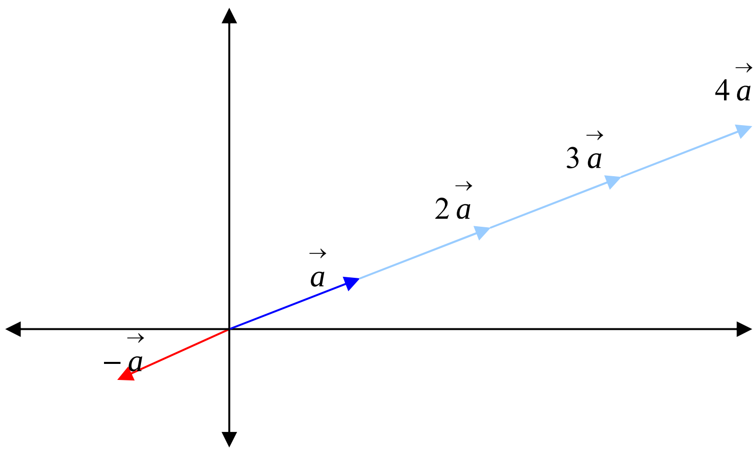
Si sumamos un vector $\vec{a}$ consigo mismo tres veces obtenemos otro vector que se denota por $3\vec{a}$ que tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{a}$, pero su módulo es tres veces el de $\vec{a}$; además sus coordenadas se obtienen multiplicando por 3 las coordenadas de $\vec{a}$.

Si denotamos por $-\vec{a}$ el vector de igual módulo y dirección que $\vec{a}$ pero de sentido contrario, llamado **vector opuesto de** $\vec{a}$, y realizamos la suma de $-\vec{a}$ consigo mismo, cinco veces, obtenemos un vector de la misma dirección que $\vec{a}$, sentido contrario y de longitud igual a cinco veces la longitud de $\vec{a}$; sus coordenadas se obtienen multiplicando por –5 las coordenadas de $\vec{a}$. La definición de multiplicación de un escalar por un vector surge de manera natural.

Definición Si α es un número real y $\vec{a} = (p,q)$ un vector del plano, la multiplicación del escalar α por el vector $\vec{a}$ o ponderado de $\vec{a}$ por α es el vector

$$\alpha\,\vec{a} = (\alpha\, p, \alpha\, q),$$

que se obtiene multiplicando por α cada componente o coordenada del vector $\vec{a}$.



Hay dos vectores del plano que juegan un papel importante: $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$.
En efecto, para cualquier vector (*x*, *y*) del plano se tiene:

$$(x, y) = (x,0) + (0, y) = x(1,0) + y(0,1) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Este última igualdad dice que *todo vector del plano representado por un par ordenado (x, y) puede ser expresado en función de los vectores unitarios* $\vec{i} = (1,0)$ *y* $\vec{j} = (0,1)$.

Decimos que el vector (x, y) ha sido expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. De manera más general diremos que un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si hay escalares α y β tales que

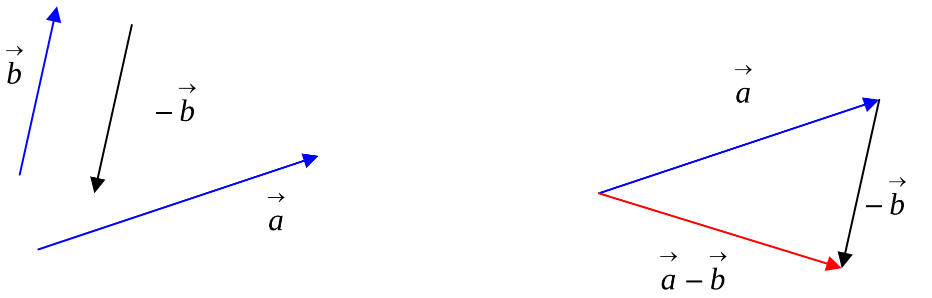
$$\vec{v} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$$

De la misma manera como se definió la diferencia o resta de dos números se define la **resta de vectores**; sumando al primer vector el opuesto del segundo, es decir,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

De esta definición se desprende que para encontrar geométricamente la diferencia de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir $\vec{a} - \vec{b}$, es suficiente copiar el vector opuesto de $\vec{b}$ a continuación del vector $\vec{a}$ y unir el origen de $\vec{a}$ con el extremo de $\vec{b}$, como se muestra en la figura adjunta.

.



Ejemplos

1. ¿Qué figura genera en el plano la estela del segmento que une los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (3, 4)$, cuando este se traslada mediante el vector de coordenadas (5,0)?

   Solución: Observamos que los puntos *A* y *B* se desplazan hasta los puntos *A*’ = (6, 1) y *B*’ = (8, 4), por lo tanto la figura generada es el paralelógramo *AA*’*B*’*B*.

2. Un móvil se desplazó en el plano desde el origen hasta el punto cuyas coordenadas son (3, 4) y enseguida se desplazó hasta alcanzar el punto (7, –2). Encuentre las coordenadas del vector desplazamiento determinado por el segundo movimiento del móvil.

Solución: Si denotamos por x e y las coordenadas del vector desplazamiento desconocido, obtenemos la ecuación (3, 4) + (x, y) = (7, –2). Comparando las coordenadas se deduce que $3 + x = 7$ y $4 + y = -2$, por lo tanto $x = 4$ e $y = -6$ y el vector desplazamiento buscado es (4, –6).

3. Exprese el vector (3,4) como combinación lineal de los vectores (1, 1) y (1, –1).
   Solución: Hay que buscar escalares α y β tales que

$$\alpha(1, 1) + \beta(1, -1) = (3, 4)$$

Nuevamente, comparando las coordenadas encuentras el sistema de ecuaciones

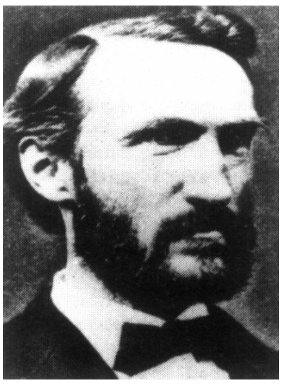
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = 4 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\alpha = 7/2$ y $\beta = -1/2$. ¡Verifícarlo! Por lo tanto,

$$7/2\,(1, 1) + (-1/2)(1, -1) = (3, 4).$$

Sir Williams Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865), matemático irlandés nacido en Dublín, a los 21 años fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y Profesor de Astronomía de la Universidad.
En un trabajo sobre óptica, usando sólo matemática predijo la refracción cónica de ciertos cristales. Debido principalmente a este trabajo fue armado caballero en 1835. A él se debe la regla que empleamos para multiplicar números complejos.
Descubrió los cuaterniones que inspiraron el estudio de los vectores.



Josiah Willard Gibbs

Posteriormente Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), matemático estadounidense, imprime un cuadernillo sobre vectores para sus estudiantes que posteriormente, en 1901, fue transformado con la ayuda de E. B. Wilson en un texto formal Vector Análisis.
Las obras de estos matemáticos son muy extensas y no sería posible resumirla en un par de líneas.

En el ejemplo del desplazamiento de una hormiga en el espacio, desde un punto O que podemos considerar como el origen de coordenadas hasta otro punto que denotaremos por A, ¿qué datos necesitaríamos para determinar completamente la flecha $\overrightarrow{OA}$ que une los puntos O y A?

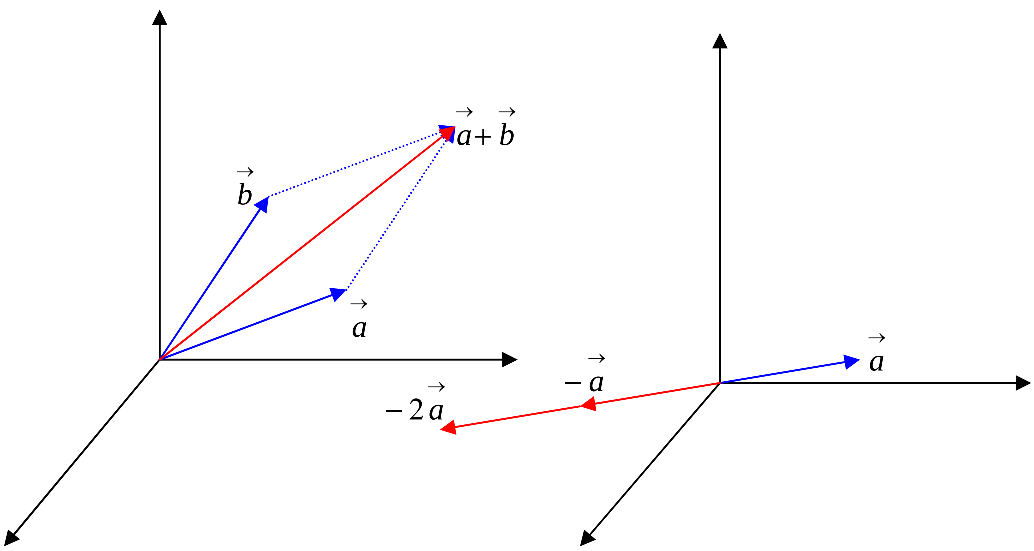
Una manera de hacerlo es similar a como se hizo en el plano; determinando las coordenadas la punta A de la flecha. También es posible sumar y ponderar un vector en el espacio de la siguiente manera.

Definición La suma de los vectores del espacio tridimensional $\vec{a} = (p, q, r)$ y $\vec{b} = (l, m, n)$, es el vector

$$\vec{a} + \vec{b} = (p + l, q + m, r + n)$$

¿Qué significado geométrico tiene esta suma de vectores?

En la figura de la página siguiente, a la izquierda, se puede ver que el vector suma es la diagonal del paralelogramo formado a partir de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Definición Si α es un número real y $\vec{a} = (p, q, r)$ es un vector del espacio tridimensional, la multiplicación del escalar α por el vector $\vec{a}$ o ponderado de por α es el vector $\vec{a}$ es el vector

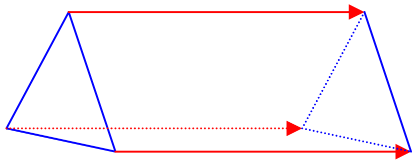
$$\alpha\vec{a} = (\alpha p, \alpha q, \alpha r)$$

que se obtiene multiplicando por α cada componente o coordenada del vector .

En la figura del lado derecho de más arriba se puede observar la ponderación del vector $\vec{a}$ por el escalar (–2).

Pregunta: ¿Qué cuerpo geométrico determina la estela del triángulo cuyos vértices son $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, –3, 1)$ y $C = (5, 2, 6)$ cuando se traslada mediante el vector (3, 3, 4)?

Respuesta: Es suficiente que dibujemos el triángulo *ABC* y la figura obtenida por desplazamiento de éste. Sus vértices *A*, *B* y *C* se transforman en los puntos *A*' = (4, 5, 7), *B*' = (5, 0, 5) y *C*' = (8, 5, 10), por lo tanto el triángulo *ABC* se transforma en el triángulo *A*'*B*'*C*' y por consiguiente, uniendo *A* con *A*', *B* con *B*' y *C* con *C*' vemos que el cuerpo determinado es un prisma similar al que se muestra en la figura de más abajo. Sería conveniente que el lector represente los puntos *A*, *B*, *C* y *A*', *B*', *C*' en un sistema de coordenadas y dibuje el prisma correspondiente.



Observemos que en el espacio tridimensional los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$ juegan el mismo rol que los vectores $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$ del plano, en el sentido que todo vector de coordenadas (*x*,*y*,*z*) del espacio tridimensional puede ser expresado función de estos de la siguiente manera:

$$(x, y, z) = (x,0,0) + (0, y,0) + (0,0, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

También decimos que el vector (*x*, *y*, *z*) ha sido expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. De manera más general diremos que un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ si hay escalares α, β y γ tales que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

Ejercicios

1. Sobre una masa *m* se ejercen dos fuerzas perpendiculares entre sí; la primera es de 6 N (Newton) y 8N respectivamente. Calcule el módulo de la fuerza resultante.
2. Una partícula se mueve en el plano siguiendo una trayectoria que comienza en el punto de coordenadas (9, 7) y termina en el punto cuyas coordenadas son (5, 12). Dibuje el vector desplazamiento y encuentre sus coordenadas.
3. Un móvil se desplaza en el plano en dirección noreste siguiendo una trayectoria rectilínea que comienza en el origen de coordenadas y formando un ángulo de 60° con la horizontal; si el módulo del vector desplazamiento es de 70 m, encuentre las coordenadas de dicho vector.
4. Dibuje el cuadrado cuyos vértices son (0, 0, 0), (1, 0,0), (1, 1, 0) y (0, 1, 0). Dibuje el cuerpo que se determina en el espacio por desplazamiento de dicho cuadrado mediante el vector $\vec{k} = (0,0,1)$ y escriba las ecuaciones de los planos que contienen a sus caras.
5. Exprese el vector (6, –3) como combinación lineal de los vectores (5,1) y (3, 2). Haga un gráfico e interprete geométricamente su resultado.
6. Si $\vec{AB} = (5,3)$ es el vector que une los puntos *A* y *B*, siendo *A* = (2, 4), encuentre las coordenadas del punto *A*.
7. Represente gráficamente los vectores $\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y después bosqueje el plano que contiene al origen y a los puntos extremos de $\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
8. Exprese el vector (2, 3, 5) como combinación lineal de los vectores tridimensionales (1, 0, 0), (1, 1, 0) y (1, 1, 1). Represente gráficamente estos vectores e interprete geométricamente.
9. ¿Qué representa geométricamente el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores (1, 0) y (0, 1)? ¿Qué puede decir de todas de las combinaciones lineales de (1, 1) y (1, –1)?
10. ¿Qué representa geométricamente el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores (1, 0, 0), (0,1,0) y (0, 0, 1)? ¿Qué puede decir de todas de las combinaciones lineales de (1, 0, 0), (1, 1, 0) y (1, 1, 1)?
11. Describa geométricamente el conjunto de todos los puntos del plano que tienen la forma (*x*, *y*) = (1, 2) + *t* (4, –1). Indicación: Dibuje para diferentes valores de *t*.
12. Describa geométricamente el conjunto de todos los puntos del plano que tienen la forma (*x*, *y*, *z*) = (1, 2, 3) + *t* (2,4, –1). Indicación: Dibuje para diferentes valores de *t*.
13. Si *A* = (2, 3) y *B* = (–1, 5), encuentre las coordenadas del vector $\vec{AB}$ y determine el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, y) = (2, 3) + t\ \vec{AB}$. Compare las coordenadas de los vectores en esta última igualdad y eliminando *t* halle qué relación existe entre *x* e *y*. ¿Qué representa esta ecuación que relaciona *x* con *y*?

14. Si A = (2, 3, 4) y B = (1, –5, 3), encuentre las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y determine el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, y, z) = (2, 3, 4) + t\ \overrightarrow{AB}$.
15. Un navío se sirve de dos pequeñas lanchas para salir de su embarcadero. Una de ellas tira con una fuerza de 100 N y la otra con 90 N. Si la primera lancha tira formando un ángulo de 30° con el eje de la embarcación principal, ¿en qué ángulo con respecto al eje de dicha embarcación debe tirar la segunda lancha para que el navío se mueva en la dirección de su eje?

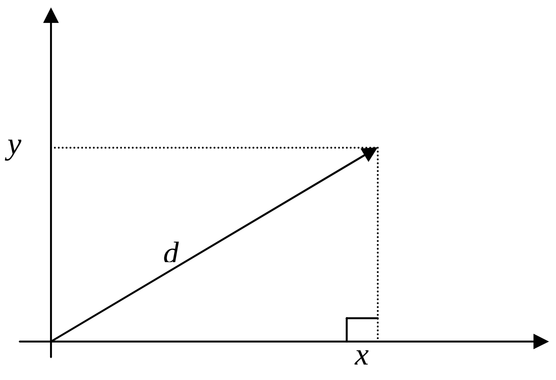
§ 2. Longitud o norma de un vector. Áreas y productos escalar y vectorial.

Norma de un vector

Hemos visto que las magnitudes vectoriales quedan determinadas por tres datos: Dirección sentido y módulo. En nuestros ejemplos estas magnitudes han sido representadas por flechas en el plano o en el espacio tridimensional, de manera que quedan determinadas por un par de coordenadas en el plano y en el espacio por tres coordenadas. Con este dato en la mano quisiéramos calcular el módulo de un vector en función de sus coordenadas.

Para que no se piense que este cálculo es un mero capricho de los matemáticos, recordemos que al iniciar la primera sección hemos sumado dos velocidades perpendiculares, la del bote, en dirección perpendicular a la de las aguas del río, y la que aporta la corriente del río al bote. Desde luego que para conocer la velocidad resultante del nadador, fue necesario determinar su módulo.

Comencemos por hacer este cálculo en el plano: Supongamos que $\vec{a} = (a_1, a_2)$ es el vector del plano que hemos representado, en la figura de más abajo, a través de una flecha que comienza en el origen de coordenadas y cuya longitud d hemos identificamos con el módulo del vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$.



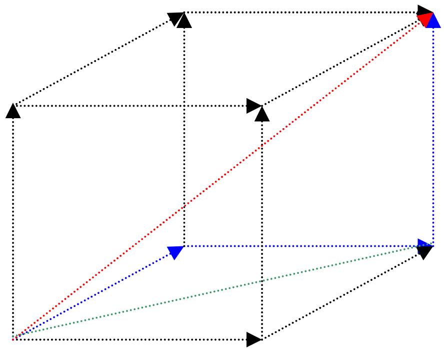
Entonces del Teorema particular de Pitágoras se puede deducir que

$$d^2 = x^2 + y^2,$$

de donde

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

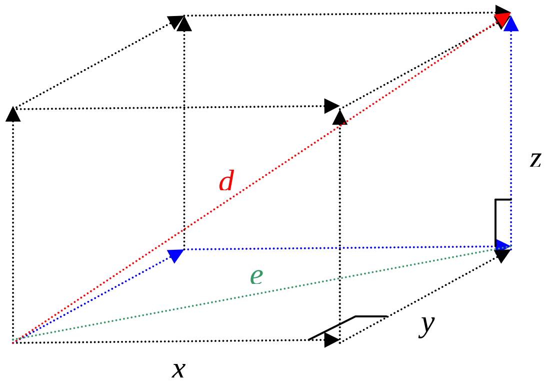
Es frecuente que en dimensión tres también se tenga que calcular el módulo de un vector cuando se conoce sus coordenadas.



¿Recuerde que si una hormiga avanza en la pieza cúbica de lado un metro, siguiendo la trayectoria azul, entonces la flecha roja representa el desplazamiento de esta hormiga?

Con el teorema de Pitágoras se puede verificar que la longitud de esta flecha es $\sqrt{3}$.

Desde luego que la mayoría de las piezas no son cúbicas, razón por la cual podemos suponer que sus dimensiones son las siguientes: largo = *x* m, ancho = *y* m y alto = *z* m. ¿Cómo calcularíamos la longitud del vector desplazamiento?



Primero observamos que el triángulo cuyos lados tienen longitudes *x*, *y* y *e* es rectángulo. Aplicando el Teorema particular de Pitágoras tenemos:

$$e^2 = x^2 + y^2$$

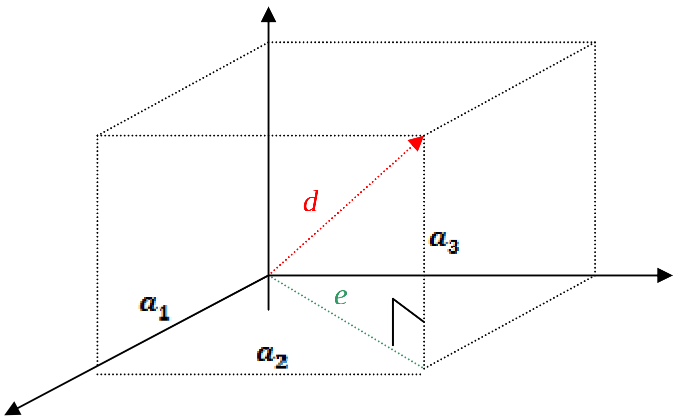
El triángulo cuyos lados miden *e*, *z* y *d* también es rectángulo, por lo tanto podemos aplicar otra vez el Teorema Particular de Pitágoras y obtener $d^2 = e^2 + z^2$, por consiguiente

$$d^2 = e^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

de manera que

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

De manera similar es posible calcular la longitud de un vector tridimensional definido a través de sus coordenadas. Por ejemplo, si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces se puede representar este vector mediante la flecha que se aprecia en la figura adjunta



Primero podemos notar que el triángulo cuyos lados tienen longitudes a_1, a_2 y e es rectángulo. Aplicando el Teorema particular de Pitágoras tenemos que

$$e^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Como el triángulo de lados e, a_3 y d también es rectángulo, aplicando por segunda vez el Teorema Particular de Pitágoras se ve que $d^2 = e^2 + a_3^2$. Pero ya sabemos que $e^2 = a_1^2 + a_2^2$, por consiguiente $d^2 = e^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Extrayendo raíz cuadrada finalmente obtenemos

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Definición La norma de un vector bidimensional es el número real

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La norma de un vector tridimensional $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es el número real no negativo

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Desde luego que la norma de un vector del espacio o del plano corresponde a la longitud de la flecha que lo representa. Así por ejemplo, si la unidad de medida en cada eje es el centímetro, entonces la longitud de la flecha que representa al vector del espacio $\vec{a} = (2,1,3)$ en centímetros es $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Propiedades de la norma

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores bi o tri dimensionales entonces se verifica las siguientes propiedades:

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$

   En efecto, si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ entonces tenemos que $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$. Como por definición de raíz cuadrada de un número, esta es positiva o nula, se tiene que $\|\vec{a}\| \geq 0$. ¡Haga la demostración para vectores tridimensionales!

2. $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

   Es obvio que si $\vec{a} = (a_1, a_2) = (0,0)$, entonces $\|\vec{a}\| = 0$. Recíprocamente, si $\|\vec{a}\| = 0$ entonces $\|\vec{a}\|^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = 0$, de donde se deduce que $a_1 = a_2 = 0$, es decir, $\vec{a} = (a_1, a_2) = (0,0)$. ¡Ahora proceda con vectores de tres componentes!

3. $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

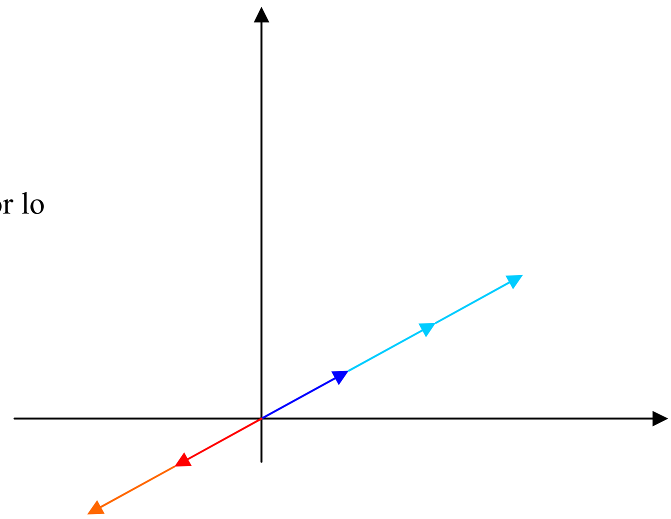
   Si $\lambda \in IR$ entonces $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$, por lo tanto

   $\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2}$

   $= \sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + a_2^2)}$

   $= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

   $= |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

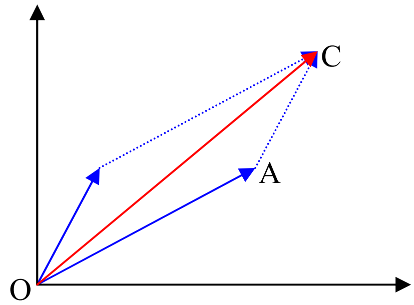


¡Hágalo para vectores con tres componentes!

Observemos que siempre es válida la igualdad cuando el escalar es positivo o nulo, sin embargo, para escalares negativos no es cierta, por ejemplo, si $\lambda = -2$ vemos que la norma de $\lambda \vec{a}$ es $|\lambda| = 2$ veces la norma del vector $\vec{a}$.

4. $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$

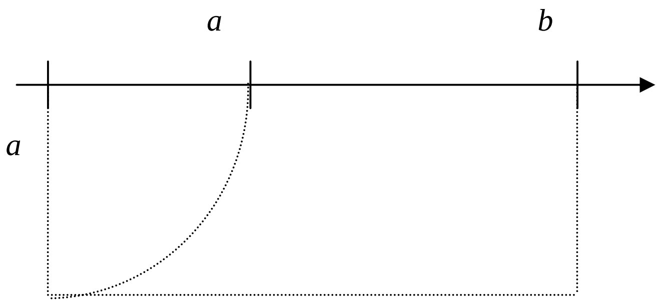
En la figura adjunta podemos observar que la longitud del lado del triángulo *OAC* es inferior es menor que la suma de las longitudes de los lados y del triángulo.



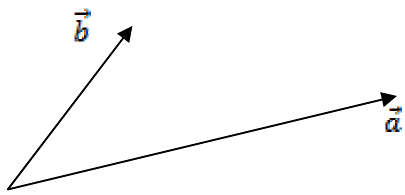
Aunque podemos dar ahora una demostración de esta propiedad, la postergaremos hasta después de estudiar el producto de dos vectores.

§ 3 Producto punto o escalar

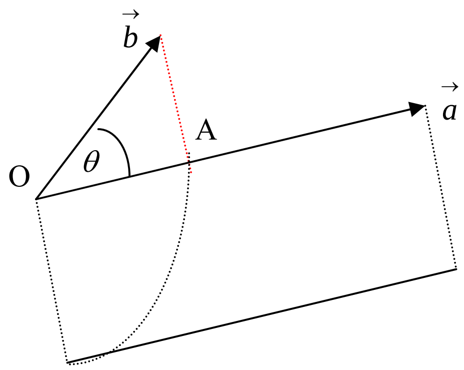
El producto de los dos números reales positivos *a* y *b* representa el área del rectángulo de lados *a* y *b* que podemos construir como se muestra en la figura adjunta.



Si tenemos dos vectores en el plano como los de la figura del lado derecho, nos preguntamos **¿qué significado podemos dar al producto de estos vectores, de manera que representen un área y que dicha área corresponda al producto de números reales, cuando los dos vectores están sobre el eje de las abscisas?**



Si trazamos una perpendicular al vector $\vec{a}$ desde el extremo de $\vec{b}$, obtenemos la proyección ortogonal OA de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.



Tal vez sería interesante hacer la construcción anterior con las longitudes de OA y $\vec{a}$ respectivamente.

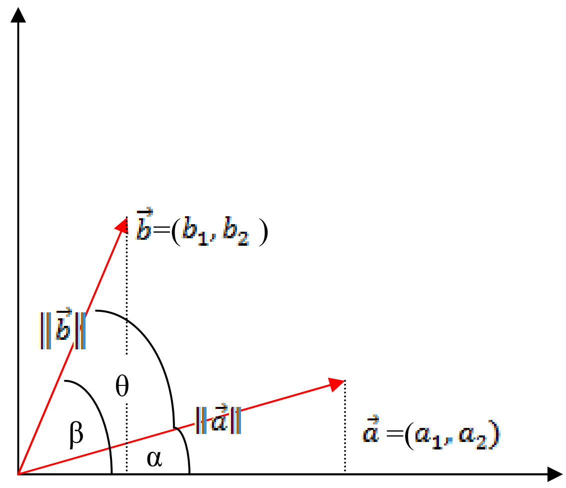
Desde luego que cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están sobre el eje real, entonces la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ coincide con la norma de $\vec{b}$, por lo tanto se puede tratar a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como números reales, razón por la cual es obvio que este producto también coincide con el producto ordinario de números reales.

Para calcular este producto, en la figura anterior observamos que $\cos\theta = \dfrac{OA}{\|\vec{b}\|}$, de donde $OA = \|\vec{b}\|\cos\theta$. Por consiguiente, el área del rectángulo cuyos lados tienen medidas iguales a las longitudes de $\vec{a}$ y de OA es

$$\acute{A}rea = \|\vec{a}\| \cdot OA = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

Observación: Esta fórmula es válida siempre que θ sea un ángulo agudo o recto. Si el ángulo θ es obtuso entonces la fórmula con módulo es cierta.

Surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Cómo calculamos esta área cuando los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están dados por sus coordenadas?



Si miramos la figura lateral observamos que

$$a_1 = \|\vec{a}\|\cos\alpha \,,\; b_1 = \|\vec{b}\|\cos\beta,$$

$$a_2 = \|\vec{a}\|\operatorname{sen}\alpha \,,\; b_2 = \|\vec{b}\|\operatorname{sen}\beta,$$

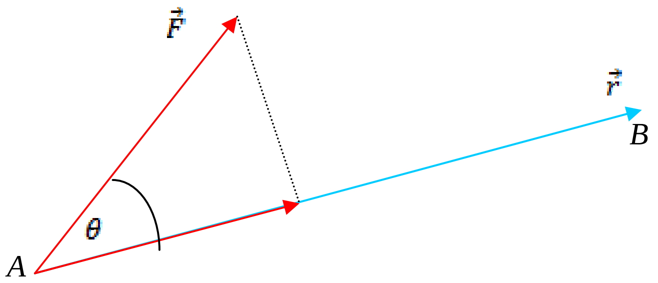
Como además

$$a_1b_1 + a_2b_2 =$$
$$= \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha\cos\beta + \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$= \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\beta-\alpha)$$

Entonces, con $\theta = \beta - \alpha$ obtenemos

$$\acute{A}rea = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| cos\theta$$

Si $F = (F_1, F_2)$ es una fuerza constante que actúa sobre una partícula, desplazándola desde un punto *A* hasta un punto *B*, como se indica en la figura adjunta, y $\vec{r} = (r_1, r_2)$ es el vector que representa a dicho desplazamiento, entonces, se define el trabajo mecánico realizado como el producto del módulo de la fuerza que actúa en la dirección del desplazamiento, por el módulo de dicho desplazamiento.



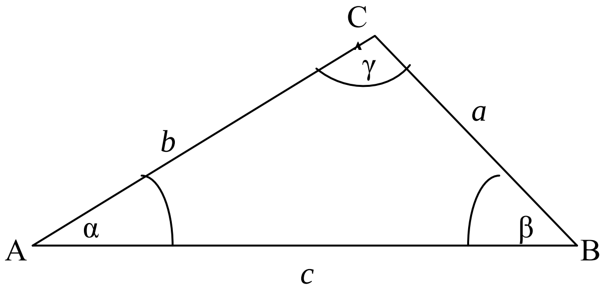
Si denotamos por θ el ángulo formado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ entonces la fuerza que actúa en la dirección del desplazamiento es la proyección de $\vec{F}$ sobre $\vec{r}$, por tanto su módulo es $\|\vec{F}\| \cos\theta$. Como el módulo de $\vec{r}$ es $\|\vec{r}\|$ entonces el trabajo realizado es

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos\theta$$

Como se puede apreciar, para dos vectores dados $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, es importante estudiar la expresión $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Desde luego que el problema de calcular el producto $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$ en función de las coordenadas se presenta también en el espacio tridimensional, por ejemplo, cuando se desea calcular el trabajo mecánico realizado por la acción de una fuerza que mueve a una partícula desde un punto *A* hasta otro punto *B* en el espacio.

Previo a responder a esta pregunta recordamos el **Teorema del Coseno**: En todo triángulo *ABC* de lados *a*, *b* y *c* y ángulos interiores α, β y γ se tiene

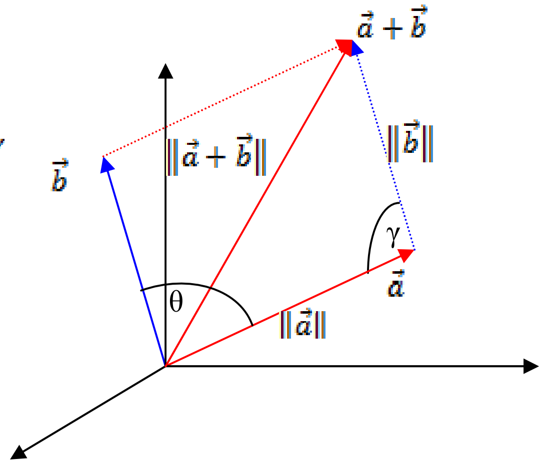


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Sí $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores del espacio tridimensional que representamos como muestra la figura de más abajo, entonces, del Teorema del Coseno se obtiene:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\gamma$$

Como los ángulos opuestos de un paralelógramo son iguales y la suma de sus ángulos interiores es 360º, se tiene que $2\gamma + 2\theta = 360°$, de donde $\gamma = 180° - \theta$.



Rescribiendo la última igualdad entre vectores en función de sus coordenadas se obtiene

$$(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3)^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

Desarrollando los cuadrados de binomio y simplificando se deduce la igualdad

$$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Definición El **producto escalar o producto punto** de los vectores bidimensionales $\vec{a}=(a_1,a_2)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2)$ es el número real

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

El producto punto de los vectores tridimensionales $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ es el número real

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Hasta aquí hemos visto cómo el producto punto dos vectores, expresado en función del ángulo θ, aparece de manera natural en problemas relativos a áreas y a trabajo mecánico. ¿Y qué se puede decir de la definición que escribimos en términos de las componentes de los vectores involucrados? Supongamos que las componentes del vector $\vec{a}$ representan los precios de determinados artículos de consumo diario en un supermercado, por ejemplo carne a $2.860 el kilo, vino a $ 2350 la botella y queso a $ 4.200 el kilo y que las componentes de $\vec{b}$ indican el número de unidades que compramos, entonces el producto punto $\vec{a}\cdot\vec{b}$ representa el total de la compra.

Ejemplos

1. Si $\vec{a}=(2,-1,3)$ y $\vec{b}=(3,2,5)$ entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+(-1)\cdot 2+3\cdot 5=19$.
2. Si $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$ entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cdot 1+1\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.
3. ¿Será posible calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del ejemplo anterior?

   Solución: Si calculamos el producto punto de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ usando sus coordenadas y tenemos presente que $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$, vemos que $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta=2\sqrt{3}$.

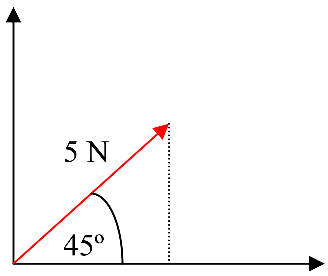
Sustituyendo los valores de las normas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, en la última ecuación es posible despejar $\cos\theta$ y determinar el valor de θ.

Como $\|\vec{a}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ y $\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, entonces se tiene que $2 \cdot 2 \cdot \cos\theta = 2\sqrt{3}$, de donde, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente, el ángulo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ mide 30º.

4. Para mover una partícula m desde el punto A = (1,7) hasta B = (15,21), ha sido necesaria la acción de una fuerza $\vec{F}$ de 5 N, que forma un ángulo de 45º con la horizontal, en sentido noreste. ¿Cuál es el trabajo mecánico realizado si las distancias se miden en metros?

Solución: En este caso, el desplazamiento $\vec{r}$ es el vector de coordenadas (14,14) = (15–1, 21–7) y su norma es $\|\vec{r}\| = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}$. Aproximadamente 19,8 m.

Desde luego que el trabajo realizado es $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo determinado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$. El problema es que no conoces el ángulo θ, por lo tanto es mejor seguir otro camino.



Si denotamos por F_1 y F_2 las componentes del vector $\vec{F}$, vemos que

$$\cos 45^\circ = \frac{F_1}{5}, \text{ por lo tanto, } F_1 = 5 \cdot \cos 45^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{F_2}{5}, \text{ por lo tanto, } F_2 = 5 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces $\vec{F} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ y el trabajo realizado por la acción de la fuerza $\vec{F}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \left(14 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2}, 14 \cdot \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 35\sqrt{2} + 35\sqrt{2} = 70\sqrt{2}$, es decir, 49,5 Joules aproximadamente.

Propiedades del producto punto

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores bi o tri dimensionales entonces se verifica las siguientes propiedades:

1. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $(\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$
4. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Ahora demostraremos una desigualdad importante que nos permitirá dar una prueba de la desigualdad triangular.

Teorema: (Desigualdad de Cauchy – Schwarz) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores bi o tri dimensionales entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

Demostración: Como para todo valor de *t* en ***R*** se tiene que $(t\,\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\,\vec{a}+\vec{b}) \geq 0$, desarrollando el producto punto tenemos:

$$\|\vec{a}\|^2\, t^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,t + \|\vec{b}\|^2 \geq 0 \ .$$

Esta desigualdad ocurre para todo valor de *t* en ***R*** si y sólo si $\Delta = (2\,\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 4\|\vec{b}\|^2\|\vec{a}\|^2 \leq 0$, es decir,

$$4(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 4\|\vec{b}\|^2\|\vec{a}\|^2 \leq 0,$$

de donde,

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq \|\vec{b}\|^2\|\vec{a}\|^2 \ ,$$

por consiguiente,

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| .$$

Teorema: (Desigualdad triangular) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores bi o tri dimensionales entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \leq \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$$

Demostración:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2 \leq \left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| + \left\|\vec{b}\right\|^2 = \left(\left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2$$

Siendo ambas bases positivas, de la desigualdad anterior puedes deducir que

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \leq \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\| .$$

Ejercicios resueltos

1) Hallar un vector unitario $\vec{u}$ cuya dirección coincida con la del vector $\vec{a} = (3,4)$.

   Solución: Si multiplicamos el vector $\vec{a}$ por el recíproco de su norma obtenemos una solución al problema planteado.

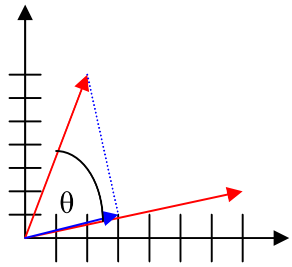
   Como $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, entonces $\vec{u} = (3/5, 4/5)$ es una solución

   ¿Habrán otras soluciones?

   Desde luego que $-\vec{u}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y además es unitario, razón por la cual es otra solución.

2) Hallar el vector $\vec{p}$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector $\vec{b} = (7,2)$ sobre el vector $\vec{a} = (2,7)$. Pruebe que $\vec{p} - \vec{a}$ es ortogonal a $\vec{p}$.

Solución: Razonando como en el ejercicio anterior vemos que el vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}$ es unitario y tiene misma dirección y sentido que $\vec{a}$.



Si θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$, el vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ tiene norma $\left\|\vec{b}\right\|\cos\theta$.

Como su dirección y sentido coincide con la de $\vec{a}$,

se puede observar que $\vec{p} = (\left\|\vec{b}\right\| \cos \theta)\, \vec{\mathrm{u}}$. Teniendo en cuenta que $\cos \theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}$,

deducimos que

$$\vec{p} = (\left\|\vec{b}\right\| \cos \theta)\, \vec{\mathrm{u}} = \left\|\vec{b}\right\| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|} \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|^{2}} \vec{a}.$$

Sustituyendo en esta última igualdad obtenemos

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|^{2}} \vec{a} = \frac{14+14}{\sqrt{53}\sqrt{53}}(2,7) = \frac{28}{53}(2,7) = \left(\frac{56}{53}, \frac{28}{9}\right)$$

Observación: El razonamiento del ejercicio anterior se aplica a cualquier par de vectores no nulos, por lo tanto, la proyección de un vector $\vec{b}$ sobre otro vector $\vec{a}$ se puede hallar mediante la fórmula

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|^{2}} \vec{a}$$