Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

Asignatura: Matemáticas III
Profesores: M. A. – P. G.

GUÍA N° 1

1. Sean $\vec{a} = (2,-1,1)$, $\vec{b} = (-3,3,2)$, y $\vec{c} = (4,3,2)$ tres vectores de V_3.
   Encuentre las componentes de cada uno de los siguientes vectores:
   a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b}$ c) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$ d) $7\vec{a} - 5\vec{b} - 2\vec{c}$ e) $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

2. Represente gráficamente los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que unen el origen con los puntos $A = (3,2)$ y $B = (2,5)$. En la misma figura, represente $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ para cada uno de los siguientes valores del parámetro t: $t = \frac{1}{3}$; $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$; $t = 1$; $t = 2$; $t = -1$; $t = -2$.

3. Resuelva el ejercicio anterior suponiendo que $\vec{c} = t\vec{a} + \vec{b}$.

4. Sean $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (5,2)$ y $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, en donde *x* e *y* son números reales.
   a) Dibujar el extremo C de $\vec{c}$ en cada uno de los siguientes casos: $x = y = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{4}$; $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$; $x = 2,\ y = -1$; $x = 3,\ y = -2$; $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2}$; $x = -1$ e $y = 2$.
   b) ¿Qué conjunto es el de los puntos C obtenidos cuando *x* e *y* toman todos los valores reales tales que *x* + *y* = 1? (Hacer una conjetura y mostrar el lugar geométrico en la figura. No hacer la demostración.)
   c) Dar una idea del conjunto de todos los puntos C obtenidos al variar independientemente *x* e *y* en los intervalos $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, y hacer una representación de ese conjunto.
   d) ¿Qué conjunto es el de todos los puntos C obtenidos si *x* varía en el intervalo $0 \le x \le 1$ e *y* recorre todos los números reales?
   e) ¿Qué conjunto resulta si *x* e *y* recorren ambos el conjunto de todos los números reales?
   f)

5. Demuestre que todo vector $\vec{c} = (c_1, c_2)$ de V_2 puede ser escrito en la forma $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, siendo $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (3,-1)$. Calcule *x* e *y* en función de c_1 y c_2.

6. Sí $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, donde $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ y $\vec{c} = (1,0,1)$, siendo *x*, *y* y *z* números reales,
   a) Encuentre las coordenadas del vector $\vec{d}$.
   b) Si $\vec{d} = \vec{0}$, demuestre que $x = y = z = 0$.
   c) Calcule los valores que debe asignarse a *x*, *y*, *z* para que $\vec{d} = (-1,3,2)$.

7. Suponga que $\vec{a} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (1,1,1)$, $\vec{c} = (3,1,3)$ y que $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, donde *x*, *y* y *z* son escalares.

   a) Halle las coordenadas de $\vec{d}$.
   b) ¿Es posible hallar *x*, *y* y *z*, no todos nulos, de manera que $\vec{d} = \vec{0}$?
   c) ¿Es posible escoger *x*, *y* y *z* tales que $\vec{d} = (1,0,-1)$?

8. suponga que $\vec{a} = (1,2,-3,2)$, $\vec{b} = (-1,2,-3,2)$ y $\vec{c} = (0,1,1,1)$. Calcule cada una de las siguientes expresiones:

   a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{b} \cdot 2\vec{c}$ c) $2\vec{a} \cdot 2\vec{c}$ d) $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + 3\vec{c})$ e) $(4\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c}$

9. Dados los vectores $\vec{a} = (1,-2,3)$, $\vec{b} = (-3,2,-4)$ y $\vec{c} = (1,5,-2))$. Introduzca los paréntesis adecuadamente, de manera que las siguientes expresiones tengan sentido y efectúe dichas operaciones:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{b}\vec{c}$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}$ c) $\vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ d) $\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c}$ e) $\vec{a} / \vec{b} \cdot \vec{c}$

10. ¿Será verdad que si $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{a} \neq 0$ entonces $\vec{b} = \vec{c}$? Justifique su respuesta.

11. ¿Es cierto qué si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ para todo $\vec{b}$ entonces $\vec{a} = \vec{0}$? Justifique su respuesta.

12. Halle un vector no nulo $\vec{c}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, sabiendo que $\vec{a} = (3,-1,2)$ y $\vec{b} = (2,-1,3)$.

13. Encuentre números reales *x* e *y* tales que $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ y $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, sabiendo que $\vec{a} = (4,-3,1)$, $\vec{b} = (3,2,1)$.

14. Considere los siguientes vectores del espacio tridimensional $\vec{a} = (3,-1,2)$, $\vec{b} = (1,2,3)$ y $\vec{c} = (2,-1,3)$. Calcule la norma de cada uno de los siguientes vectores:
   a) $2\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - 2\vec{b}$ c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ d) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ e) $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

15. En cada uno de los siguientes casos, determine un vector $\vec{b}$ del plano tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ y $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \|$:

a) $\vec{a} = (1,1)$ b) $\vec{a} = (-1,1)$ c) $\vec{a} = (2,3)$ d) $\vec{a} = (3,-4)$

16. Considere los vectores tridimensionales $\vec{a} = (1,1,-2)$ y $\vec{b} = (3,-1,2)$. En cada caso halle un vector unitario $\vec{c}$ paralelo a:
a) $\vec{a} + 3\vec{b}$ b) $3\vec{a} - \vec{b}$ c) $\vec{a} + 2\vec{b}$ d) $\vec{a} - 2\vec{b}$ e) $2\vec{a} - 3\vec{b}$

17. De entre los siguientes vectores, halle todos los pares ortogonales: $\vec{a} = (4,1,-3)$, $\vec{b} = (1,2,2)$, $\vec{c} = (1,2,-2)$, $\vec{d} = (2,1,2)$ y $\vec{e} = (2,-2,-1)$.

18. Hallar todos los vectores del plano que tienen la misma longitud que $\vec{a}$ y le son ortogonales si:
a) $\vec{a} = (1,2)$ b) $\vec{a} = (1,-1)$ c) $\vec{a} = (-2,3)$ d) $\vec{a} = (2,-1)$

19. Dados los puntos $A = (2,3,4)$ y $B = (3,-4,-2)$, halle un punto C en el espacio de tres dimensiones de manera que el triángulo ABC resulte rectángulo.

20. Sean $\vec{a} = (1,-3,2)$ y $\vec{b} = (3,2,4)$ dos vectores de V_3. Hallar un vector unitario $\vec{c}$ ortogonal a ambos vectores.

21. Calcule el producto punto y el producto cruz de los siguientes vectores:
    a) $\vec{a} = (2,3,4)$ y $\vec{b} = (0,2,3)$
    b) $\vec{a} = (-1,0,2)$ y $\vec{b} = (1,3,3)$
    c) $\vec{a} = (1,1,-1)$ y $\vec{b} = (0,1,2)$

22. En cada caso encuentre el valor de sen θ, donde θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
    a) $\vec{a} = i + k, \vec{b} = i + j$
    b) $\vec{a} = j + k, \vec{b} = i + k$
    c) $\vec{a} = i + 2j + 3k, \vec{b} = 4i + 5j + 6k$

23. Demuestre que para todo par de vectores bi o tridimensionales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se verifica

$$\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\|^2 - \left\| \vec{u} - \vec{v} \right\|^2 = 4\,\vec{u} \cdot \vec{v}$$

24. Demuestre que para dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se verifica

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=2\left\|\vec{u}\right\|^2+2\left\|\vec{v}\right\|^2$$

¿Qué teorema geométrico acerca de lados y diagonales de un paralelogramo se puede deducir de esta identidad?

25. Si θ es el ángulo que forman los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, demuestre que

$$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$$

Interprete geométricamente este resultado.

26. En cada caso, halle un vector unitario ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
   a) $\vec{a}=2i+j-k, \vec{b}=i-2j+k$
   b) $\vec{a}=i+2j+3k, \vec{b}=3i+2j-4k$

27. Hallar el área del triángulo PQR en cada caso:
   a) $P=(0,1,1), Q=(1,1,0)\ y\ R=(1,0,1)$
   b) $P=(1,2,3), Q=(2,3,1)\ y\ R=(3,1,2)$

28. En cada caso, hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:
   a) $\vec{a}=(0,1,1), \vec{b}=(2,1,2)\ y\ \vec{c}=(5,0,0)$
   b) $\vec{a}=(2,1,-1), \vec{b}=(3,0,1)\ y\ \vec{c}=(0,1,1)$

29. Si en un determinante de orden 2 se intercambian dos filas o dos columnas entonces el valor del nuevo determinante difiere en el signo con valor del determinante dado.

30. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

31. Verifique: Si en un determinante de orden 2 se intercambia las filas por las columnas, entonces el nuevo determinante tiene el mismo valor que el determinante dado.

32. Verifique: Si en un determinante de orden 2 hay dos filas o dos columnas iguales, entonces el valor del determinante es nulo.

33. Demuestre que no es válida la siguiente igualdad de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$$

34. ¿Qué puede decir sobre las propiedades dadas en los ejercicios 31 y 32 para determinantes de orden 3? Mediante un contraejemplo pruebe que la igualdad de 33 no es válida para determinantes de orden tres.

35. Resuelva el ejercicio anterior usando el hecho que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}],$$

siendo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

36. ¿Qué significado geométrico tiene el hecho que el producto mixto de tres vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ sea nulo? Ind: Recuerde que el valor absoluto del producto mixto de tres vectores representa el volumen del paralelepípedo determinado por dichos vectores.

37. Suponga que $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ son vectores no nulos. ¿Qué significado geométrico tiene el hecho que su producto vectorial se anule? Ind. Recuerde que la norma del producto cruz es el área del paralelogramo determinado por dichos vectores.
38. ¿Qué obtiene si usted calcula el producto cruz de un vector consigo mismo? ¿Y de dos vectores paralelos?