Capítulo V

Valores y vectores propios.

Diagonalización de operadores lineales.

Hemos visto que la aplicaciones lineales de IR^n en IR^n están definidas a través de una expresión de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n);$$

pero esta fórmula puede ser demasiado complicada para ser aplicada en diversas situaciones problemáticas, razón por la cual sería deseable encontrar una base en la cual la expresión de *f* sea más simple, por ejemplo

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = (d_1u_1, \dots, d_nu_n).$$

En caso que esto ocurra y que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ sea una tal base, entonces en esa base se tendría $f(v_i) = d_iv_i$, para *i* = 1, 2, 3,…*n*. Esto motiva la definición que damos a continuación.

Definición: Decimos que λ es un **valor propio de una aplicación lineal u operador lineal** $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$**,** donde *V* es un espacio vectorial de dimensión finita *n*, si existe un vector $v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v$. En este caso decimos que ***v* es un vector de *f* asociado al valor propio λ.**

Ejemplos

1. Los escalares 3 y 4 son valores propios del operador lineal $f: IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que $f(x, y) = (2x - y, 2x + 5y)$, porque $f(1, -1) = (3, -3) = 3(1, -1)$ y $f(1, -2) = (4, -8) = 4(1, -2)$. En este caso decimos que $(1, -1)$ es un vector propio asociado al valor propio 3 y que $(1, -2)$ es un vector propio asociado al valor propio 4.

2. La unidad es un valor propio del operador identidad $id: IR^n \rightarrow IR^n$ y cualquier vector no nulo es un vector propio de *id* asociado al valor propio 1.

De la definición anterior se deduce que si IR^n tiene una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ cuyos elementos son vectores propios del operador lineal $f: IR^n \rightarrow IR^n$ y $f(v_i) = d_i v_i$, para i = 1, 2, 3,…n, entonces en esa base, la representación matricial de f es

$$D = [f]_B = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

En este caso decimos que la aplicación lineal *f* es diagonalizable y su expresión en la base *B* es $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = (d_1 u_1, \dots, d_n u_n)$.

En el ejemplo 1 anterior tenemos que $f(1, -1) = 3(1, -1)$ y $f(1, -2) = 4(1, -2)$, de manera que f es diagonalizable y además

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo la expresión de f en la base $B = \{(1, -1), (1, -2)\}$ es $f(u_1, u_2) = (3u_1, 4u_2)$.

Cabe preguntarse: ¿Cómo determinamos los valores y vectores propios de una matriz?

Supongamos que *A* es la matriz asociada a *f* en la base canónica de IR^n. Entonces, *v* es un vector propio de *f* asociado al valor propio λ si y solo si $f(v) = \lambda v$, o sea si $Av^T = \lambda v^T$.

Obtenemos el sistema de ecuaciones lineales $(A - \lambda I)v^T = 0$. Pero este sistema tiene solución $v^T \neq 0$ si y sólo si

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Esta última ecuación permite hallar los valores propios de *f* (o de la matriz *A*) y se llama e**cuación característica de *f* (o de *A*).** *Conocidos los valores propios es posible hallar los vectores propios asociados a esos valores propios.*

Ejemplos:

1. Examinemos el caso del operador lineal $f: IR^2 \to IR^2$ tal que $f(x,y) = (2x - y, 2x + 5y)$ definida en el ejemplo 1 anterior.
   La representación matricial de f en la base canónica de IR^2 es

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   De manera que la ecuación característica es

   $$det\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = 0.$$

   O sea

   $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

   que equivale a $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$. Resolviendo esta ecuación se encuentran los valores propios o valores característicos $\lambda = 3\ y\ \lambda = 4$ de *f*.

   Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 3$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales

   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

   o sea

   $$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Este sistema es equivalente a la ecuación $x + y = 0$ o $y = -x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x,y) = (x,-x) = x(1,-1)$, con $x \neq 0$, es un vector propio de *f* asociado al valor propio $\lambda = 3$.
   ¿Y para el valor propio $\lambda = 4$?
   Se tiene:

   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o sea

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es equivalente a la ecuación $2x + y = 0$ o $y = -2x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x, y) = (x, -2x) = x(1, -2)$, con $x \neq 0$, es un vector propio de *f* asociado al valor propio $\lambda = 4$.

¿Es *f* diagonalizable?

Es claro que $(1, -1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$ y $(1, -2)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$.
Claramente estos vectores son L. I., por lo tanto $B = \{(1, -1), (1, -2)\}$ es una base de IR^2 formada por vectores propios de f; por consiguiente *f* es diagonalizable. La matriz asociada a *f* en la base *B* es

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la expresión de *f* es esa base es $f(u_1, u_2) = (3u_1, 4u_2)$.

2. Consideremos la aplicación lineal $f: IR^3 \to IR^3$ tal que $f(x, y, z) = (6x + 4z, x + 2y - z, -3x - z))$.

   La representación matricial de f en la base canónica de IR^3 es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   De manera que la ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

   Desarrollando por la segunda columna obtenemos la ecuación $(2-\lambda)\big((6-\lambda)(-1-\lambda)+12\big) = 0$, que es equivalente a $(2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$ o mejor aún a esta otra ecuación $(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$. Resolviendo esta ecuación se encuentran los valores propios o valores característicos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2\ y\ \lambda_3 = 3$ de *f* (decimos que 2 es un valor propio doble o que tiene multiplicidad 2).

Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o sea

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es equivalente a las dos ecuaciones $x + z = 0$ y $x - z = 0$, de donde se obtiene $x = z = 0$. Como no se halla condición sobre la variable y, ésta puede tomar cualquier valor. Entonces, los vectores propios de f asociados al valor propio $\lambda_1 = 2$ son los vectores de la forma $(x, y, z) = (0, y, 0) = y(0,1,0)$, con $y \neq 0$.
¿Y para el valor propio $\lambda_3 = 3$?
Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

o sea

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es equivalente a las dos ecuaciones $3x + 4z = 0$ y $x - y - z = 0$. Despejando z de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene: $y = \frac{7}{4}x$ y $z = -\frac{3}{4}x$. En consecuencia, todo vector de la forma $(x, y, z) = (x, \frac{7}{4}x, -\frac{3}{4}x) = x\,(1, \frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$, con $x \neq 0$, es un vector propio de f asociado al valor propio $\lambda = 3$.

¿Es f diagonalizable?

Entre los vectores propios de f asociados al valor propio 2 podemos seleccionar sólo un vector propio L. I. y otro entre los vectores propios asociados al valor propio 3. Como 2 vectores propios L. I. no son suficientes para formar una base IR^3 de, entonces este espacio no pese una base formada por vectores propios de f y por lo tanto f no es diagonalizable.

3. Consideraremos un operador lineal que difiere en el signo de un coeficiente con aquel dado en el ejemplo anterior y obtendremos una aplicación lineal diagonalizable.
   Sea $f: IR^3 \to IR^3$ el operador lineal definido por la igualdad $f(x,y,z) = (6x + 4z, x + 2y + z, -3x - z))$.

   Sin dificultad el lector puede verificar que la ecuación característica es la misma que la hallada en el ejemplo 2, por lo tanto los valores propios son los mismos que en el ejemplo 2.
   Para hallar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2$, hay que encontrar las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

   o sea

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Este sistema de ecuaciones lineales es equivalente a la ecuación $x + z = 0$, de donde $z = -x$. Como no hay restricción para la variable y, los vectores propios f asociados al valor propio $\lambda = 2$ son todos los vectores no nulos de la forma $(x,y,z) = (x,y,-x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0)$.
   Para el valor propio $\lambda = 3$, resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   obtenemos $\left[\begin{array}{l} 3x + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$, de donde $\left[\begin{array}{l} z = -\frac{3}{4}x \\ y = \frac{1}{4}x \end{array}\right.$.

   Los vectores propios asociados al valor propio 3 son todos los vectores de la forma $(x,y,z) = (x, \frac{1}{4}x, -\frac{3}{4}x)$=$x\,(1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, con $x \neq 0$ (para $x = 4$ se obtiene el vector propio $(4,1,-3)$).
   En este caso podemos seleccionar los vectores $(1,0,-1)$ y $(0,1,0)$ asociados al valor propio 2, y el vector propio $(4,1,-3)$ asociado al valor propio 3.

Un candidato a base del espacio vectorial IR^3 es el conjunto $B = \{(1,0,-1), (0,1,0), (4,1,-3)\}$. Como B consta de tres vectores que son L. I. porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces efectivamente B es una base de IR^3, siendo entonces *f* diagonalizable.

Desde luego que la matriz asociada a *f* en esta nueva base es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

en tanto que la expresión de f en esta base esta dada por $f(u_1, u_2, u_3) = (2u_1, 2u_2, 3u_3)$.

Después de haber examinado estos ejemplos el lector puede haber notado algunas regularidades que podemos expresar en términos precisos.

Proposición: El conjunto de todos los vectores propios asociados a un mismo valor propio λ de un operador lineal f y el vector nulo forman un subespacio vectorial de *V*.

Demostración: Denotemos por V_λ el conjunto cuyos elementos son el cero y los vectores propios de f asociados al valor propio λ. Entonces es claro que $\vec{0} \epsilon V_\lambda$. Además, si $v_1, v_2 \epsilon V_\lambda$, $\alpha, \beta \epsilon K$ y definimos $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, entonces

$$f(v) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda v,$$

por lo tanto $v \epsilon V_\lambda$. Esto prueba que V_λ es subespacio de *V*.

Definición: Si λ es un valor propio del operador lineal $f: V \to V$, decimos que V_λ es el subespacio propio de *f* asociado al valor propio λ. La dimensión de este subespacio se llama multiplicidad geométrica de λ.

Proposición: Los vectores propios asociados a valores propios diferentes son L.I.

Demostración: Por inducción completa. Para un vector el resultado es obvio. Supongamos que el resultado es cierto hasta para $k-1$ vectores y consideremos que $v_1, \ldots, v_k$ son vectores propios asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$, entonces aplicando *f* en ambos lados de esta igualdad se obtiene $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k) = 0$. Por lo tanto

$$\alpha_1\lambda_1\, v_1 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\, v_k = 0.$$

Pero también se verifica la igualdad

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_1 v_k = 0.$$

Restando término a término estas igualdades se obtiene

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\, v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\, v_k = 0.$$

Por la hipótesis de inducción estos $k-1$ vectores son L.I., por lo tanto $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$. Como los valores propios son distintos entonces $\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ y entonces debe ser $\alpha_1 v_1 = 0$, de donde $\alpha_1 = 0$. Esto prueba la independencia lineal de los vectores propios.

Cabe preguntarse **qué significa que un operador lineal $f\colon V \to V$ sea diagonalizable.** Además la siguiente definición parece razonable.

Definición: Decimos que un operador lineal $f\colon V \to V$ es diagonalizable si existe una base de *V* cuyos elementos son vectores propios de *f*.

El resultado más importante de esta sección es el siguiente:

Teorema: Si todos los valores propios de *f* están en *K* y *V* posee una base de vectores propios de *f*, entonces *f* es diagonalizable. Esto ocurre cuando todos los valores propios de *f* están en *K* y las multiplicidades algebraicas de éstos coinciden con sus multiplicidades geométricas respectivas.

Para trabajar con operadores lineales $f\colon V \to V$, siendo V un espacio vectorial de dimensión finita, no necesariamente IR^n, hay que recordar algunos hechos importantes:

- Si un operador $f\colon V \to V$ se representa en distintas bases B_1 y B_2 mediante matrices *A* y *B*, entonces existe una matriz invertible *N* tal que $B = N^{-1}AN$. En este caso decimos que las matrices son similares.

- Cabe la siguiente pregunta: Para determinar los valores propios de $f\colon IR^n \to IR^n$ hemos usado la base canónica de IR^n, ¿qué pasaría si usamos otra base?
  Respuesta: Si *A* y *B* son las matrices que representan a *f* en esas bases, entonces existe *N* invertible tal que $B = N^{-1}AN$.

Se tiene:

$$\begin{aligned} det(B-\lambda I_n) &= \det(N^{-1}AN-\lambda N^{-1}N) \\ &= detN^{-1}(A-\lambda I_n)N \\ &= detN^{-1}det(A-\lambda I_n)detN \\ &= det(A-\lambda I_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $det(B-\lambda I_n)=0$ si y sólo si $det(A-\lambda I_n)=0$ (ecuaciones características asociadas respectivamente a las matrices *B* y *A*). En consecuencia, las ecuaciones características obtenidas son las mismas; esto significa que se obtienen los mismos valores propios.
Este último resultado se resume en la siguiente proposición: **Dos matrices similares tienen los mismos valores propios**.

- Si $f: V \to V$ es un operador lineal, entonces para hallar los valores propios de *f*, podemos representar matricialmente a *f* en una base cualquiera. Usando la matriz asociada podemos determinar los valores propios de la misma manera que hemos usado para operadores de IR^n en IR^n.
  Por el mismo razonamiento que hemos empleado en el punto anterior, vemos que usando otra base se encuentran los mismos valores propios.

- Si $f: IR^n \to IR^n$ es diagonalizable y *A* es la matriz que representa a *f* en la base canónica de IR^n, entonces existe una matriz *P* invertible tal que

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}=P^{-1}AP,$$

  donde *P* es la matriz cuyas columnas tienen por coeficientes las coordenadas de los vectores propios que forman la base de IR^n. En este caso decimos que *P* es la matriz que diagonaliza a la matriz *A*.
  En general, si $f: V \to V$ es diagonalizable y *A* es la matriz que representa a *f* en una base *B* determinada, entonces existe una matriz *P* invertible tal que

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}=P^{-1}AP.$$

  Las columnas de *P* tienen por coeficientes las coordenadas de los vectores propios de *f* en la base *B*.

Ejemplos

1. Hemos visto en el ejemplo 1 anterior que la matriz asociada al operador lineal $f: IR^2 \to IR^2$, definido por la igualdad $f(x, y) = (2x - y, 2x + 5y)$, en la base canónica de IR^2 es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Además vimos que $(1, -1)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 3$ y $(1, -2)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$, por lo tanto, la matriz P que diagonaliza a A es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Constatemos que esto es realmente así. A simple vista la matriz P es invertible porque sus vectores columnas son L. I., pero la forma correcta de verificarlo es observando que $detP = -1 \neq 0$.
Además:

$$\mathrm{Cof}(P) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} Adj(P) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la expresión de f es esa base es $f(u_1, u_2) = (3u_1, 4u_2)$.

2. En el ejemplo 3 anterior se ve que la matriz asociada en la base canónica al operador lineal $f: IR^3 \to IR^3$ tal que $f(x,y,z) = (6x+4z, x+2y+z, -3x-z))$ es

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una base de vectores propios del espacio vectorial IR^3 es $B = \{(1,0,-1), (0,1,0), (4,1,-3)\}$. Los primeros dos vectores de esta base están asociados al valor propio 2 en tanto que el tercer vector está asociado al valor propio 3.
Deducimos que la matriz *P* que diagonaliza a la matriz *A* es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para constatar este hecho verificamos primero que $detP = 1 \neq 0$, de manera que *P* es invertible. Además:

$$\text{Cof}(P) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando el recíproco del determinante de *P* por la matriz adjunta de *P* hallamos su inversa, por lo tanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la expresión de f en esta base esta dada por $f(u_1, u_2, u_3) = (2u_1, 2u_2, 3u_3)$.

Ejercicio: Calcular A^{2011} si A es la matriz dada en el último ejemplo 2.
Solución: En el ejemplo 2 anterior hemos visto que existe una matriz P invertible y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a la izquierda por P y a la derecha por P^{-1} ambos miembros de la ecuación $P^{-1}AP = D$, obtenemos $A = PDP^{-1}$. Elevando a la potencia 2011ambos lados de esta última igualdad se obtiene

$$A^{2011} = (PDP^{-1})^{2011} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^{2011}P^{-1}$$

Como D es una matriz diagonal, si la multiplicamos por si misma 2011 veces obtenemos

$$D^{2011} = \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} A^{2011} &= PD^{2011}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2011} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{2011} & 0 & 4 \cdot 3^{2011} \\ 0 & 2^{2011} & 3^{2011} \\ -2^{2011} & 0 & -3 \cdot 3^{2011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^{2011} + 4 \cdot 3^{2011} & 0 & -4 \cdot 2^{2011} + 4 \cdot 3^{2011} \\ -1 \cdot 2^{2011} + 3 \cdot 3^{2011} & 2^{2011} & -1 \cdot 2^{2011} + 1 \cdot 3^{2011} \\ 3 \cdot 2^{2011} - 3 \cdot 3^{2011} & 0 & 4 \cdot 2^{2011} - 3 \cdot 3^{2011} \end{pmatrix} \end{aligned}$$