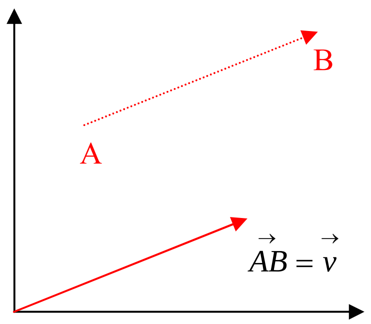
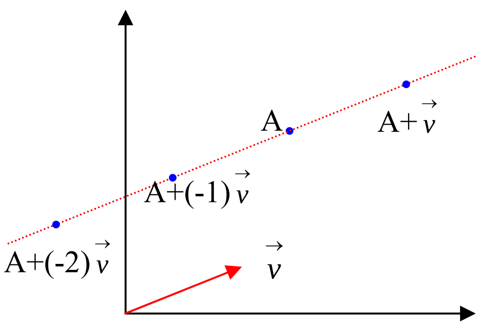
§ 5 Rectas y planos en el espacio



A cada par de puntos A y B del plano o del espacio tridimensional, hemos asociado en § 1 un vector $\vec{AB}$ como se muestra en la figura contigua; de manera que si conocemos el punto A y el vector $\vec{AB}$, podemos recuperar el punto B. ¿Cómo? Simplemente copiamos $\vec{AB}$ a continuación de A y el extremo de $\vec{AB}$ es el punto B.

Definición: Decimos que B es la suma del punto A con el vector $\vec{v}$ si $\vec{AB} = \vec{v}$.

$$B = A + \vec{v}$$

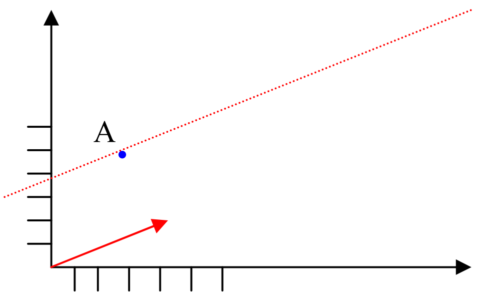


En la figura adyacente en que se da el punto A y el vector $\vec{v}$ hemos representado los puntos $A + (-2)\vec{v}$, $A + (-1)\vec{v}$, $A + \vec{v}$. Podemos observar que estos puntos están sobre una recta que contiene a A y es paralela a $\vec{v}$, de manera que resulta natural la siguiente definición.

Definición: La recta que pasa por un punto A dado con vector director $\vec{v} \neq \vec{0}$ es

$$L = L(A, \vec{v}) = \left\{ P = A + t\,\vec{v} \;/\; t \in R \right\}$$

Ejemplos



1. La recta del plano que pasa por el punto $A = (3,5)$ con vector director $\vec{v} = (4,1)$ es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ del plano tales que $P = A + t\,\vec{v}$, **es decir, tales que** $(x, y) = (3,5) + t(4,1)$.

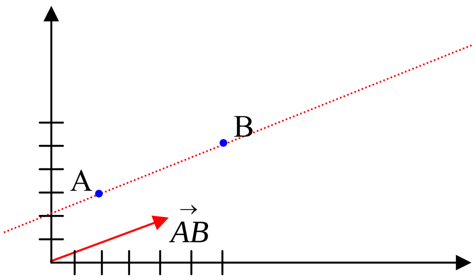
La igualdad $(x, y) = (3{,}5) + t(4{,}1)$ es la llamada "ecuación vectorial paramétrica" de esta recta. De manera más general, toda recta está definida a través de su **"ecuación vectorial paramétrica"** $P = A + t\vec{v}$, donde A es un punto contenido en la recta y $\vec{v}$ es un vector director.

Puesto que en la enseñanza media representabamos rectas en el plano a través de ecuaciones muy distintas a esta, surge la pregunta ¿y cuál es la ecuación cartesiana de esta recta en el plano? Para responder a esta pregunta podemos igualar las componentes de los vectores en la ecuación vectorial, obteniendo las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

conocidas como "*ecuaciones escalares paramétricas de la recta*". Llegado a este punto, recordamos que la ecuación cartesiana de una recta en el plano no contiene el parámetro *t*, razón por la cual lo despejaremos en las dos ecuaciones anteriores. De la primera ecuación se obtiene $t = \frac{x-3}{4}$ y de la segunda $t = y - 5$, por lo tanto $\frac{x-3}{4} = y - 5$. Multiplicando por 4 y reordenando términos, encontramos la ecuación de la recta buscada, a saber $x - 4y + 17 = 0$.

2. Escriba la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A = (2{,}3)$ y $B = (6, 5)$, después las ecuaciones escalares paramétricas y finalmente la ecuación general de la recta.



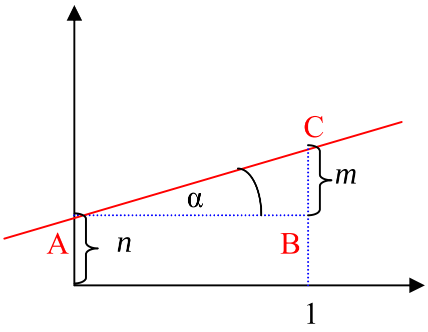
Solución: En la figura adjunta observamos que el vector $\vec{AB}$ es un vector director para la recta que pasa por los puntos *A* y *B*, de manera que la ecuación vectorial paramétrica de esta recta es $P = A + t\vec{AB}$ o de manera equivalente,

$$(x, y) = (2{,}3) + t(4{,}2)$$

Las ecuaciones escalares paramétricas son $x = 2 + 4t$ y $y = 3 + 2t$. Despejando *t* en ambas ecuaciones e igualando los valores encontrados se obtiene la ecuación $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2}$. Multiplicando esta igualdad por 4 y reordenando términos obtenemps la ecuación general de la recta $x - 2y + 4 = 0$.

3. Hallar un vector director de la recta cuya ecuación cartesiana es $y = mx + n$. Encontrar su ecuación vectorial paramétrica y las ecuaciones escalares paramétricas respectivas. Aplicar lo anterior a la ecuación $y = 3x + 5$.

Solución: Recordamos que la pendiente *m* de la recta dada es la tangente trigonométrica del ángulo α del triángulo rectángulo *ABC* (ver figura siguiente), que se obtiene dividiendo el cateto opuesto al ángulo α por el cateto adyacente, es decir,



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1} = BC = m$$

Por lo tanto, el vector $\vec{AC} = (1, m)$ es un vector director para la recta $y = mx + n$.

Como el punto $A = (0, n)$ pertenece a la recta, entonces su ecuación vectorial paramétrica es $(x, y) = (0, n) + t(1, m)$, de manera que sus ecuaciones escalares paramétricas son $x = t$ e $y = n + tm$.

Las ecuaciones escalares paramétricas para la recta dada por la ecuación $y = 3x + 5$ son respectivamente $x = t$ e $y = 5 + 3t$.

4. Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto $A = (2,1,3)$ cuyo vector director es $\vec{v} = (2,4,-5)$.

Solución: Desde luego que la ecuación pedida es $(x, y, z) = (2,1,3) + t(2,4,-5)$, y si deseamos encontrar las ecuaciones escalares paramétricas debemos escribir las siguientes igualdades: $x = 2 + 2t$, $y = 1 + 4t$ y $z = 3 - 5t$.

Cabe preguntarse si será posible despejar la variable *t* de las ecuaciones anteriores, igualar los valores encontrados y finalmente obtener sólo una ecuación escalar para la recta considerada. La respuesta a esta pregunta es negativa; **no es posible representar una recta del espacio tridimensional a partir de exactamente una ecuación cartesiana.**

Si de cada una de las ecuaciones anteriores despejamos el parámetro *t* obtenemos

$$t = \frac{x-2}{2}, \qquad t = \frac{y-1}{4} \quad \text{y} \quad t = \frac{z-3}{-5},$$

e igualando los valores de *t* hallamos las dos ecuaciones cartesianas

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-5}$$

que puedes escribir de manera resumida así:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-5}.$$

Estas dos ecuaciones son conocidas como "*ecuaciones simétricas de la recta*" o por abuso de lenguaje, simplemente "*ecuación simétrica de la recta*". Posteriormente veremos que cada una de estas ecuaciones representa un plano en el espacio tridimensional y, en realidad, la recta corresponde a la intersección de dichos planos. De manera más general, si una recta está dada por su ecuación vectorial paramétrica

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3)$$

y las coordenadas del vector director son todas distintas de cero, entonces la ecuación simétrica de esta recta es

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

Recíprocamente, si conocemos la ecuación simétrica entonces observamos que la recta pasa por el punto $A=(x_0,y_0,z_0)$ y que un vector director es $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, de manera que podemos recuperar la ecuación vectorial paramétrica.

¿Cómo podemos saber si dos rectas son paralelas?

Dos rectas serán paralelas si y sólo si sus vectores directores son paralelos, es decir, si uno es múltiplo no nulo del otro. Resumiendo, se tiene la siguiente condición de paralelismo.

Condición de paralelismo: Dos rectas $L_1 : P=A+t\vec{v}$ y $L_2 : P=B+t\vec{w}$ **son paralelas** si y sólo sí existe α distinto de cero tal que $\vec{w}=\alpha\vec{v}$.

Ejemplos:

1. Las rectas $L_1 : (x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)$ y $L_2 : (x,y,z)=(4,5,1)+t(4,8,-10)$ son paralelas.
2. Las rectas $L_1 : (x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)$ y $L_2 : (x,y,z)=(4,5,1)+t(1,2,-\frac{5}{2})$ son paralelas.
3. No son paralelas las rectas $L_1 : \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-5}$ y $L_2 : \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{3}$.
4. ¿Cómo hallaríamos la intersección de dos rectas que se intersectan en el espacio? Por ejemplo, las rectas dadas por las ecuaciones $L_1 : (x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)$ y $L_2 : (x,y,z)=(7,11,-4)+t(1,2,3)$.
   Respuesta: Buscamos un punto (x,y,z) que esté en ambas rectas, de manera que dicho punto se escribe en la forma $(x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)$, para algún valor de t y también en la forma $(x,y,z)=(7,11,-4)+t(1,2,3)$, para otro valor de t (que

casualmente pudiera ser el mismo anterior, pero en general distinto, razón por la cual es mejor que le denotemos por *s*). En consecuencia, debemos encontrar *t* y *s* tales que
$(x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)=(7,11,-4)+s(1,2,3)$, para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2+2t=7+s \\ 1+4t=11+2s \\ 3-5t=-4+3s \end{cases} \quad \text{que es equivalente al sistema} \quad \begin{cases} 2t-s=5 \\ 4t-2s=10 \\ -5t-3s=-7 \end{cases}$$

Observamos que las dos primeras ecuaciones de este sistema son iguales, por lo tanto el sistema anterior es equivalente al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 2t-s=5 \\ 5t+3s=7 \end{cases}$$

cuya solución es $(t,s)=(2,-1)$.
Sustituyendo estos valores en las expresiones dadas para (x,y,z) obtenemos

$$(x,y,z)=(2,1,3)+t\,(2,4,-5)=(2,1,3)+2\,(2,4,-5)=(6,9,-7)$$

o si se prefiere

$$(x,y,z)=(7,11,-4)+s(1,2,3)(7,11,-4)+(-1)(1,2,3)=(6,9,-7),$$

de manera que la intersección de las rectas dadas es el punto $I=(6,9,-7)$.

Atención: Puede ocurrir que dos rectas no se intersecten en el espacio tridimensional y que sin embargo no sean paralelas. ¿Cómo puede ocurrir ésto? La respuesta la encontraremos en el siguiente ejercicio.

5. Determinar si las siguientes rectas son paralelas o si se entersectan en el espacio:

$$L_1:(x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5) \text{ y } L_2:(x,y,z)=(1,1,3)+t(1,2,3).$$

Solución: Puesto que los vectores directores $\vec{v_1}=(2,4,-5)$ y $\vec{v_2}=(1,2,3)$ no son paralelos, las rectas tampoco lo son. Sólo resta saber si estas rectas se cortan en un punto, para lo cual podemos proceder como en el ejercicio anterior. Buscamos *t* y *s* tales que $(x,y,z)=(2,1,3)+t(2,4,-5)=(1,1,3)+s(1,2,3)$, para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2+2t = 1+s \\ 1+4t = 1+2s \\ 3-5t = 3+3s \end{cases} \quad \text{que es equivalente al sistema} \quad \begin{cases} 2t-s=-1 \\ 4t-2s=0 \\ -5t-3s=0 \end{cases}$$

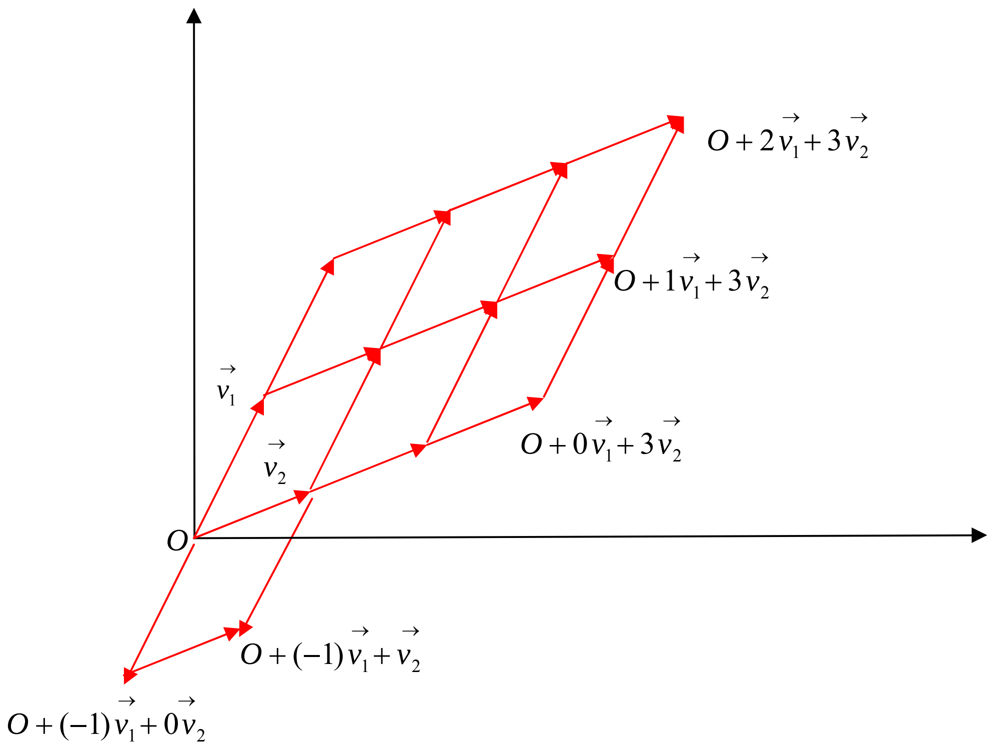
La primera ecuación $2t-s=-1$ es incompatible con la segunda $4t-2s=0$ (ya que esta última es equivalente a $2t-s=0$). En consecuencia, las rectas dadas no se intersectan ni son paralelas.

Definición: Decimos que dos rectas son **alabeadas** o que **se cruzan en el espacio** tridimensional si no son paralelas ni tienen punto en común.

Hemos visto que con un vector director y un punto podemos determinar exactamente una recta que contiene a dicho punto y es paralela al vector director dado. Los puntos de dicha recta están determinados unívocamente por los valores que toma el parámetro *t*.

¿Qué figura geométrica podemos definir a partir de un punto y dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que no están sobre una misma recta?

Para comenzar, supongamos que el punto dado es el origen y que los vectores dados tienen dos coordenadas, como se muestra en la figura adjunta.

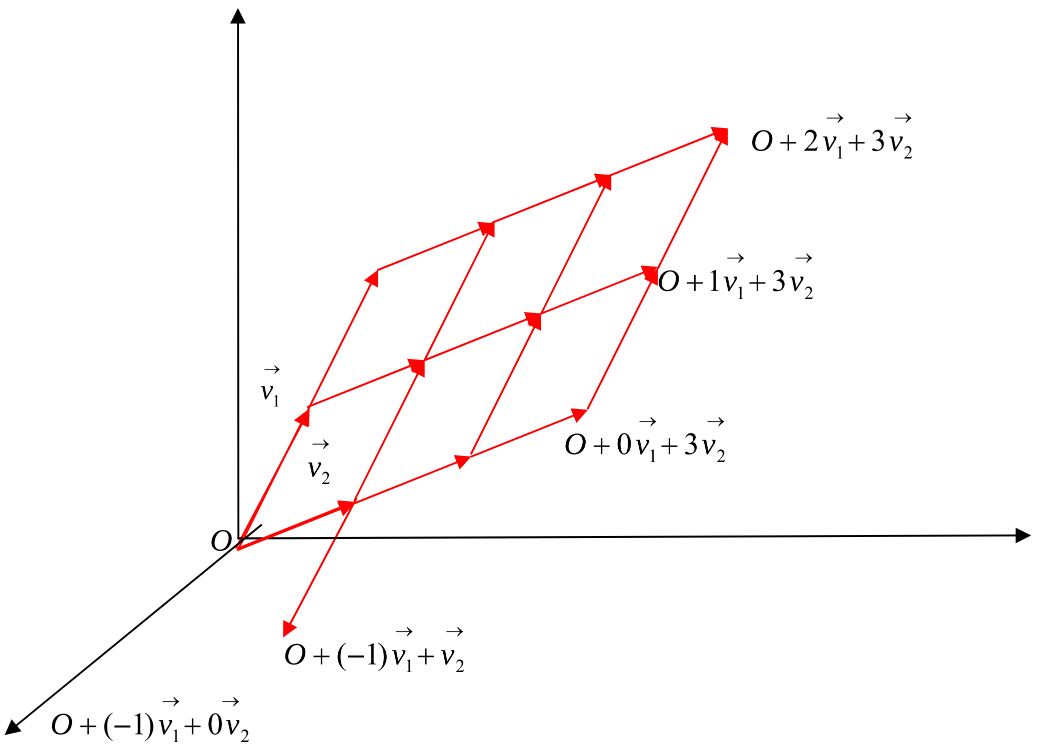


Nos damos cuenta que escogiendo adecuadamente los valores de *t* y *s* en la igualdad

$$P = O + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \,,$$

el punto P puede ser ubicado en cualquier lugar del plano; dicho de otra manera, el conjunto de todos los punto P del plano tales que $P = O + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$ es el plano mismo.

De manera natural surge la pregunta: ¿ Y si me dan un punto A en el espacio tridimensional y dos vectores no paralelos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, cuáles son todos los puntos que se obtienen al variar los parámetros t y s en la fórmula $P = A + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$?



Definición: Dado un punto A y dos vectores no paralelos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, el plano que contiene al punto A, generado por los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es P $= \left\{ P = A + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 / t, s \in \mathrm{IR} \right\}$.
Dicho en palabras, este plano está constituido por todos los puntos de la forma
$P = A + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$, que se obtienen al variar los parámetros t y s en el conjunto de los números reales.

Así, por ejemplo, el plano que contiene al punto $A=(1,2,3)$ y que está generado por los vectores $\vec{v_1}=(2,-1,3)$ y $\vec{v_2}=(1,1,-4)$, es el conjunto de todos los puntos $P=(x,y,z)$ del espacio que tienen la forma $(x,y,z)=(1,2,3)+t(2,-1,3)+s(1,1,-4)$, donde *t* y *s* varían en IR.

La ecuación entre vectores $(x,y,z)=(1,2,3)+t(2,-1,3)+s(1,1,-4)$, se llama ecuación vectorial paramétrica del plano. Esta da origen a tres ecuaciones escalares: $x=1+2t+s$, $y=2-t+s$ y $z=3+3t-4s$, que se conocen como **ecuaciones escalares paramétricas del plano.**

De manera general, la ecuación $P=A+t\vec{v_1}+s\vec{v_2}$ es la **ecuación vectorial paramétrica del plano que contiene a A y que está generado por los vectores** $\vec{v_1}$ **y** $\vec{v_2}$.
Si $A=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{v_1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ y $\vec{v_2}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, vemos que la ecuación vectorial paramétrica es equivalente a las tres ecuaciones escalares paramétricas $x=a_1+t\alpha_1+s\beta_1$, $y=a_2+t\alpha_2+s\beta_2$ y $x=a_3+t\alpha_3+s\beta_3$.

Si volvemos al ejemplo anterior y en las ecuaciones escalares paramétricas eliminamos los parámetros *t* y *s*, encontramos una ecuación que relaciona las variables *x*, *y* y *z*, es decir, una ecuación cartesiana para el plano considerado. Despejando s en la primera ecuación obtenemos $s=x-1-2t$, y sustituyendo este valor de s en la segunda ecuación deducimos que $y=2-t+x-1-2t$, es decir, $y=1-3t+x$. Despejando *t* en esta última ecuación hallamos $t=\frac{1+x-y}{3}$, expresión que al ser sustituida en la tercera ecuación escalar conduce a la igualdad $z=3+3\cdot\frac{1+x-y}{3}-4\cdot\left(x-1-2\cdot\frac{1+x-y}{3}\right)$. Reduciendo y reordenando términos en esta última ecuación podemos deducir que $x+11y+3z-32=0$.

Eliminando los parámetros *t* y *s* en las ecuaciones escalares paramétricas, obtenemos una ecuación cartesiana de la forma $ax+by+cz+d=0$, que es conocida como **ecuación general del plano**.

Ejercicios resueltos:

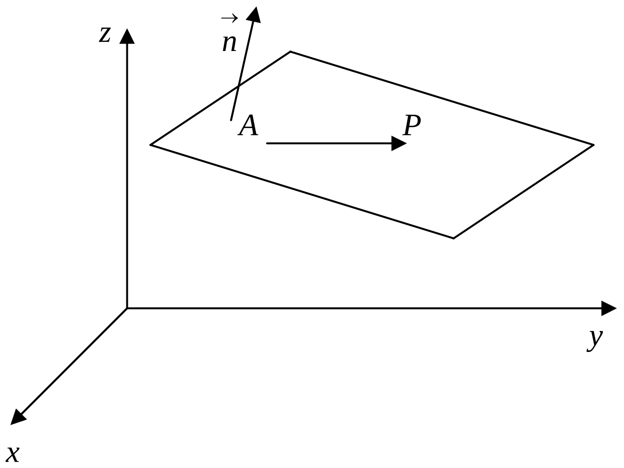
1. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A=(-1,2,1)$, $B=(3,2,2)$ y $C=(1,3,5)$.
   Solución: En este caso, es fácil darse cuenta que el plano considerado es aquel que contiene al punto $A=(-1,2,1)$ y que está generado por los vectores $\vec{AB}=(4,0,1)$ y

$\vec{AC} = (2,1,4)$, de manera que la ecuación vectorial paramétrica de este plano es $(x, y, z) = (-1,2,1) + t(4,0,1) + s(2,1,4)$. Esta última ecuación conduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x = -1 + 4t + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + t + 4s \end{cases}$$

Restando a la primera ecuación el doble de la segunda se obtiene $x - 2y = -5 + 4t$ y restando a la tercera el cuádruplo de la segunda se tiene $z - 4y = -7 + t$. Despejando t de cada una de estas dos últimas ecuaciones e igualando estos valores se deduce que $\frac{x - 2y + 5}{4} = z - 4y + 7$. Multiplicando esta igualdad por 4 y reordenando términos se obtiene la ecuación general del plano $x + 14y - 4z - 23 = 0$.

2. Encontrar el punto de intersección del plano $2x - y + 3z - 1 = 0$ con la recta cuya ecuación vectorial paramétrica es $(x, y, z) = (-1,1,3) + t(3,-2,1)$.
   Solución: Las coordenadas de cada punto (x, y, z) de la recta dada satisfacen las ecuaciones escalares paramétricas $x = -1 + 3t$, $y = 1 - 2t$ y $z = 3 + t$. Entonces, un punto de dicha recta está en la intersección si además sus coordenadas satisfacen a la ecuación del plano, es decir, si $2(-1 + 3t) - (1 - 2t) + 3(3 + t) - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación, se encuentra que $t = \frac{5}{8}$. Sustituyendo en las expresiones para *x*, *y* y *z* se encuentran las coordenadas del punto de intersección $x = -1 + 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$, $y = 1 - 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ y $z = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$, de manera que este punto es $I = (7/8, -1/4, 29/8)$.



Si $\vec{n}$ es un vector normal (perpendicular) al plano ***P*** y $A \in$ ***P***, entonces, un punto *P* pertenece al plano ***P*** si y sólo sí $\vec{AP}$ es perpendicular a $\vec{n}$. Dicho de otra manera:

$A \in$ ***P*** $\Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$

La ecuación $\vec{AP}\cdot\vec{n}=0$ se conoce con el nombre de **ecuación vectorial del plano**. Si conocemos las coordenadas de los puntos $A=(\alpha,\beta,\gamma)$, $P=(x,y,z)$ y del vector normal $\vec{n}=(a,b,c)$, la ecuación anterior se puede escribir así $(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)\cdot(a,b,c)=0$, o de manera equivalente

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0\,.$$

Esta es la **ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto** $A=(\alpha,\beta,\gamma)$**, con vector normal** $\vec{n}=(a,b,c)$. La última ecuación también se puede escribir

$$ax+by+cz+d=0\,,$$

donde $d=-(a\alpha+b\beta+c\gamma)$, y es conocida como ecuación general del plano.

Se observa que si conocemos la ecuación general del plano $ax+by+cz+d=0$, también conocemos un vector normal $\vec{n}=(a,b,c)$.

Ejercicios resueltos:

1. Escriba la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $A=(3,-1,2)$, siendo $\vec{n}=(-1,2,-4)$ un vector normal a ese plano.

   Solución: La ecuación vectorial del plano es $\vec{AP}\cdot\vec{n}=0$. Siendo $P=(x,y,z)$ encontramos la ecuación $(x-3,y+1,z-2)\cdot(-1,2,-4)=0$ y obtenemos $-(x-3)+2(y+1)-4(z-2)=0$, por tanto la ecuación pedida es $-x+2y-4z+13=0$ que equivale a $x-2y+4z-13=0$.

2. De vuelta al ejercicio que consiste en hallar la ecuación del plano que contiene a tres puntos no colineales dados: Usar la ecuación vectorial del plano para hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A=(-1,2,1)$, $B=(3,2,2)$ y $C=(1,3,5)$.

   Solución: Como los vectores $\vec{AB}=(4,0,1)$ y $\vec{AC}=(2,1,4)$ están contenidos en el plano, su producto cruz es un vector perpendicular al plano considerado, razón por la cuan sirve como vector normal. El problema propuesto es equivalente al de hallar la ecuación del plano que contiene al punto A y que tiene vector normal $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=(-1,-14,4)$.

La ecuación vectorial del plano es $(x+1, y-2, z-1)\cdot(-1,-14,4)=0$ que es equivalente a $(-1)(x+1)-14(y-2)+4(z-1)=0$ y la ecuación general de este plano es $x+14y-4z-23=0$.

3. Hallar la intersección del plano $2x+y-3z=12$ con la recta normal a dicho plano y que pasa por el punto $A=(3,2,2)$.
   Solución: Si observamos los coeficientes de la ecuación del plano dado, vemos que el vector $\vec{n}=(3,2,1)$ es normal a éste; además, $\vec{n}$ sirve como vector director de la recta normal a dicho plano. Entonces la ecuación vectorial paramétrica de la recta que contiene al punto $A=(3,2,2)$ y es normal al plano dado es $(x,y,z)=(3,2,2)+t(3,2,1)$. De aquí obtenemos las ecuaciones escalares cartesianas $x=3+3t$, $y=2+2t$ y $z=2+t$. Entonces, un punto (x,y,z) pertenece a la intersección de la recta con el plano, si y sólo si $2(3+3t)+(2+2t)-3(2+t)=12$. Resolviendo esta última ecuación se halla el valor $t=2$ y el punto de intersección $(x,y,z)=(3,2,2)+2(3,2,1)=(9,6,4)$.

Pregunta:
Imaginemos que tenemos dos planos paralelos P_1 y P_2 con sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, ¿qué podemos decir sobre sus vectores normales respectivos?

¿Parece claro que deben ser paralelos?

¿Y si los planos son perpendiculares, qué podemos afirmar sobre sus vectores normales respectivos? Si imaginamos algunas situaciones nos daremos cuenta que dichos vectores deben ser perpendiculares u ortogonales si se prefieres.

Definición: Dos planos P_1 y P_2 con vectores normales respectivos $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, son paralelos si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son paralelos (uno es múltiplo no nulo del otro).
Dos planos P_1 y P_2 con vectores normales respectivos $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, son perpendiculares u ortogonales si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ ortogonales.

Ejemplos:

1. Los planos $P_1 : 3x-4y+2z=6$ y $P_2 : 6x-8y+4z=12$ son paralelos porque $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$.

2. Los planos P_1 : $3x-4y+2z=6$ y $P_2: 6x-8y-25z=12$ son perpendiculares porque $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 18+32-50=0$.
3. ¿Para qué valor de *k* los planos P_1 : $3x-ky+2z=6$ y $P_2: kx-8y-25z=12$ son perpendiculares?

   Se observa que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (3,-k,2)\cdot(k,-8,-25)=0$ si y sólo sí $3k+8k-50=0$. Esto ocurre sólo cuando $k=50/11$.