Apunte Matemática I

Alicia Labra, Sergio Muñoz

Índice

1. Introducción

Un modelo matemático, para mostrar cuanta matemática deben saber para modelar una situación biológica.

Ecuación logística, que indica cómo crece una población sujeta a restricciones externas de espacio o alimento. Inicialmente crece exponencialmente y luego se va frenando hasta llegar a un límite. Pero la ecuación que establece el modelo indica que la rapidez de crecimiento en cada instante t es proporcional al tamaño actual de la población P y proporcional a la diferencia entre el tamaño máximo M y la población actual, es decir:

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

donde k es la velocidad de crecimiento de la población (sin contar la limitación externa M).

La función solución es

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

con P_0 la población inicial. Obtener esta solución requiere técnicas de Matemáticas IV, que a su vez requiere técnicas de Matemáticas III, Matemáticas II y Matemáticas I.

Además, si $P_0 < M$, se prueba que $P(t) < M$, y que $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$, es decir la población no sobrepasa el tamaño M sino que se acerca gradualmente y cada vez más lento hacia M. También se puede probar que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = (kM - 2kP)kP(M - P)$$

y así la gráfica de $P(t)$ tiene un punto de inflexión en $P = \frac{M}{2}$. Su gráfico aproximado se muestra en la Figura 1.

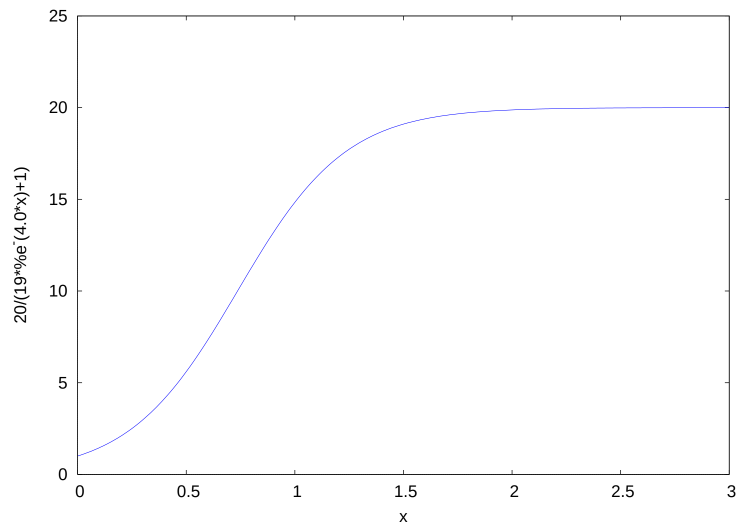


Figura 1: Una solución de la ecuación logística

2. Nociones básicas de Conjuntos, lenguaje matemático y Lógica

2.1. Conjuntos

El concepto de conjunto es primitivo, es decir, no se define. De igual forma son también conceptos primitivos: elemento y pertenencia.

Ejemplos de conjuntos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ quiere decir que x es un elemento del conjunto $\mathbb{R}$ (es un número real).

Conjunto especial: el vacio: $\emptyset$ (no posee elementos)

Definición 2.1. *Dos conjuntos A y B son iguales si y solamente si tienen exactamente los mismos elementos. Lo simbolizamos $A = B$ si son iguales, y $A \neq B$ si son distintos.*

Utilizamos llaves "{" y "}" para listar o indicar cuales son los elementos de un conjunto.

Ej, $A = \{1, 2, 3\}$ significa que A es el conjunto con los tres elementos: "1", "2" y "3". Dada la igualdad de conjuntos, ése es el único conjunto con tales elementos. También se puede indicar la condición que determina el conjunto, como en $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 1 = 0\}$, que es $\{-1, 1\}$.

Ej. Si $A = \{a, b, a\}$ y $B = \{a, b\}$ entonces $A = B$

Si $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ entonces $A \neq B$.

Definición 2.2. *Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si y solamente si todo elemento de A pertenece a B. Lo simbolizamos por $A \subset B$ si A es subconjunto de B, y por $A \not\subset B$ si A no es subconjunto de B.*

Por ejemplo, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$, $\{2, 4, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$

Ej. Describa lo que debe ocurrir para que un conjunto no sea subconjunto de otro.

Ej. Si A es un conjunto cualquiera, ¿cuando ocurre que $\emptyset \subset A$?

Definición 2.3.

1. *La unión de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a alguno o a ambos conjuntos. Se anota $A \cup B$.*

2. *La intersección de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a la vez a A y a B. Se anota $A \cap B$.*

3. *La diferencia de dos conjuntos A y B corresponde al conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se anota $A - B$.*

4. *Sea U un conjunto referencial (para nosotros se tratará normalmente de $\mathbb{R}$.) el cual contiene a todos los elementos de los conjuntos considerados. Si $A \subset U$, entonces el complemento de A en U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A. Se anota A^c.*

Ej. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$, tenemos que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A - B = \{1\}$, $B - A = \{3, 4\}$. Si el conjunto referencial es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$, $B^c = \{1, 5, 6\}$.

Las operaciones de conjuntos tienen las propiedades siguientes: Sean A, B, C conjuntos entonces

1. $A \cup A = A,\ A \cap A = A$.

2. $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

5. Si U es conjunto referencial y $A \subset U$, entonces $A^c = U - A$.

6. Leyes de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Nos interesan los siguientes subconjuntos de números reales, llamados **intervalos.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$

1. Cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$

2. Abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \ < \ x < b\}$. También se usa la notación $]a, b[$ para (a, b).

3. Semiabiertos $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \ < \ x \leq b\}$ o $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \ < \ b\}$.

   Se usa también $]a, b]$ para $(a, b]$, y $[a, b[$ para $[a, b)$

Preguntas: ¿ Cuántos elementos tiene el intervalo $[1, 4]$?, ¿y $(1, 4)$?

Ej. Encuentre $[2, 5]^c,\ [0, \sqrt{3}] \cap [1, 2],\ [-3, 7] \cup (3, 8)$

Usaremos los símbolos $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ que no pretenden ser números, sino símbolos que indican que el intervalo no es *acotado* a derecha (∞) o a izquierda $(-\infty)$.

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq b\} = [b, \infty)$

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ > \ b\} = (b, \infty)$

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\} = (-\infty, a]$

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ < \ a\} = (-\infty, a)$

Note que $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.1. *Los conjuntos también son objetos matemáticos y pueden ser elementos de otros conjuntos, por ejemplo,* $\{1, 2\} \in \{\{0\}, -2, \{1, 2\}, 3, \{4\}\}$

2.2. Nociones básicas de lenguaje matemático y Lógica

El lenguaje matemático está formado por una parte del lenguaje natural, al cual se agregan variables y símbolos lógicos que permiten una interpretación precisa de cada frase.

Definición 2.4. *Una proposición es una afirmación del lenguaje natural o de un lenguaje simbólico, sobre la cual podemos establecer que es verdadera o falsa.*
El ***valor de verdad*** *de una proposición es Verdadero (V) o es Falso (F), y no ambas a la vez.*

Ejemplos: 1.- Hay números negativos.

2.- El cuadrado de una suma es la suma de los cuadrados de sus sumandos.

3.- Todos los números son positivos.

Más complicadas:

Si llueve entonces voy al cine.

No son proposiciones Suma cinco. ¿Lloverá mañana.?

Conectivos: Operaciones entre proposiciones que dan por resultado otra proposición. Sean p, q proposiciones. Los conectivos usuales y sus símbolos son:

1.- (Conjunción) $(p \wedge q)$ se lee "p y q" y afirma que ambas p y q son verdaderas

2.- (Disyunción) $(p \vee q)$ se lee "p o q" y afirma que al menos una de las afirmaciones p o q es verdadera.

3.- (Implicación o condicional) $(p \Rightarrow q)$ se lee "p implica q" y afirma que q es cierta cuando lo sea p. También se lee como: "si (sucede) p entonces (sucede) q" o también "p es condición suficiente para que suceda q", o "q es necesaria para que ocurra p" o también "q cuando p".

4.- (Bicondicional) ($p \iff q$) se lee "p si y solo si q" y afirma que ambas proposiciones tienen igual valor de verdad. También se lee como: "sucede p si y solamente si sucede q".

5.- (Negación) $\sim p$ se lee "no p" y afirma que p es falso. $\sim p$ se menciona también como la negación de p.

Observación 2.1. *Se tiene que $\sim p$ es verdadera cuando p es falsa, y que $\sim p$ es falsa cuando p es verdadera.*

Dadas dos proposiciones p, q que pueden ser verdaderas o falsas, la siguiente tabla muestra la verdad o falsedad de cada una de las proposiciones compuestas por conectivos

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Con esto se tiene que

$p \wedge q$ es verdadera si y solo si ambas proposiciones p, q son verdaderas.

$p \vee q$ es falsa si y solo si ambas proposiciones p, q son falsas.

$p \Rightarrow q$ es falsa si y solo si si p es verdadera y q falsa.

$p \iff q$ es verdadera si y solo si ambas proposiciones p, q son verdaderas o ambas son falsas.

Observación 2.2. *Dadas proposiciones, se puede con ellas formar otras proposiciones mediante conectivos, las que a su vez se pueden usar para formar otras proposiciones mediante conectivos, y así en adelante.*

Por ejemplo, si p y q son proposiciones, también serán proposiciones $(p \vee q)$, $(p \Rightarrow (p \vee q))$, $\sim (\sim (p))$, y $\sim (p \wedge \sim q)$.

Definición 2.5. *Se dice que dos proposiciones son equivalentes y se anota $\equiv$ si y solo si ambas proposiciones tiene la misma tabla de verdad.*

Ejercicio 2.2. *Sean p, q y r proposiciones. Demuestre las siguientes equivalencias, que serán útiles al simplificar proposiciones:*

a) $\sim(\sim p) \equiv p$

b) $(p \wedge p) \equiv p$

c) $(p \vee p) \equiv p$

d) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

e) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

f) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$

g) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$

h) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

i) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

j) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

k) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ *(contrapositivo de implicación)*

l) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ *(Ley de De Morgan)*

m) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ *(Ley de De Morgan)*

n) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$

ñ) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$

o) $(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

p) $(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q))$

q) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

r) $(p \Rightarrow \sim p) \equiv \sim p$

s) $(\sim p \Rightarrow p) \equiv p$

t) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

Observación 2.3. *Algunas proposiciones se refieren a un objeto genérico, variable, y pueden cambiar su valor de verdad al cambiar el objeto a que se refieren. Si el objeto es representado por el símbolo de variable x, entonces podemos expresar con $p(x)$, $q(x)$, etcétera, a proposiciones que se refieren al objeto genérico x.*

Por ejemplo, sea $p(x)$ la proposición "x es un número entero par". Entonces $p(2)$ es verdadero, $p(3)$ es falso y $p(\sqrt{2})$ es falso.

Ejercicio 2.3. *1.-Pruebe que si a es un número entero tal que a^2 es par entonces a es par. 2.- Pruebe que $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -2)$, para x número real.*

Ejercicio 2.4. *Sea U un conjunto referencial. Si $A = \{x \in U : \alpha(x)\}$ y $B = \{x \in U : \beta(x)\}$, con $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ funciones proposicionales, demuestre:*

1. $A \cup B = \{x \in U \ : \ \alpha(x) \wedge \beta(x)\}$

2. $A \cap B = \{x \in U \ : \ \alpha(x) \vee \beta(x)\}$

3. $A - B = \{x \in U \ : \ \alpha(x) \wedge \sim \beta(x)\}$

4. $A^c = \{x \in U \ : \sim \alpha(x)\}$

2.3. Cuantificadores

Definición 2.6. *Sea A conjunto no vacio, x una variable, y $p(x)$ una proposición que se refiere a x. Entonces definimos nuevas proposiciones cuantificadas por:*

$\forall\ x \in A\ p(x)$ *se lee "para todo x en A $p(x)$", y afirma que todos y cada uno de los elementos de A hace verdadera a la proposición $p(x)$ al reemplazar la variable x por el elemento.*

$\exists\, x \in A\, p(x)$ *se lee "existe un x en A tal que $p(x)$", y afirma que al menos un elemento de A hace verdadera a la proposición $p(x)$ al reemplazar la variable x por el elemento.*

$\exists\,!\, x \in A\, p(x)$ *se lee "existe un único x en A tal que $p(x)$" y afirma que existe uno y no más que un elemento de A que hace verdadera a la proposición $p(x)$ al reemplazar la variable x por el elemento.*

Se cumplen además: $\sim \forall\, x \in A\, p(x) \ \equiv\ \exists\, x \in A(\sim p(x))$

$\sim \exists\, x \in A\, p(x) \ \equiv\ \forall\, x \in A(\sim p(x))$

¿ A qué equivale la negación de $\exists\,!\, x \in A\, p(x)$?

Ejercicio 2.5. *Escriba en lenguaje matemático:*

1. *La suma de dos números naturales es mayor que cada uno de ellos*

2. *Si un número real es positivo entonces su inverso multiplicativo es también positivo*

3. *No existe un número natural que sea mayor o igual que todo número natural*

Ejercicio 2.6. *Sea* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique:*

1. $\forall\, x \in A\, \forall\, y \in A\ (x^2 + y \text{ es par })$

2. $\exists\, x \in A\, (2x^2 + x = 15)$

3. $\exists\, x \in A\, \forall\, y \in A\ (x^2 + y \text{ es par })$

Ejercicio 2.7. *Negar y simplificar las siguientes proposiciones de modo que ni cuantificadores ni conectivos queden dentro de una proposición negada.*

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ (x > 7) \wedge \exists\, x \in \mathbb{R}\ (x = 1)$

2. $\forall\, x \in \mathbb{N}\, \forall\, y \in \mathbb{N}\ (x + y \text{ es par } \Rightarrow (x \text{ es par } \wedge y \text{ es par }))$

Ejercicio 2.8. *Demuestre que* $\{x \in \mathbb{R} : x > 9 \wedge x < 8\} = \phi$.

Ejercicio 2.9. *Usando las definiciones dadas para conjuntos y las de lógica, justifique las siguientes afirmaciones, donde los cuantificadores varían sobre todo objeto posible:*

1. $A = B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$

2. $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$

3. Números reales

3.1. Estructura algebraica

Los números reales forman una estructura algebraica con la suma y el producto, cuyas propiedades básicas (axiomas) son listadas a continuación. Casi todas las propiedades algebraicas de los números reales pueden ser justificadas a partir de estas propiedades.

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a + b) \in \mathbb{R}$. (Clausura de la suma)

2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$. (Conmutatividad de la suma)

3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$. (Asociatividad de la suma)

4. Existe en $\mathbb{R}$ un elemento denotado 0 tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}\ 0 + a = a + 0 = a$. (es único y se llama neutro)

5. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, (-a) \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. ($(-a)$ es el opuesto de a, y es único para cada a)

6. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b) \in \mathbb{R}$. (Clausura del producto)

7. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a$. (Conmutatividad de la multiplicación)

8. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. (Asociatividad de la multiplicación)

9. Existe en $\mathbb{R}$ un elemento denotado 1 tal que $\forall\, a \in \mathbb{R}\ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. (es único y se llama neutro para la multiplicación)

10. $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. ($a^{-1}$ es el inverso multiplicativo de a, y es único para cada a.)

11. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$. (Distributividad y factorización)

Definición 3.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se llama diferencia entre a y b y se anota $a - b$ al número real $a - b = a + (-b)$, y se llama cuociente entre a y b y se anota $\frac{a}{b}$ al número real $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, si $b \neq 0$.*

PROPIEDADES Para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot a = 0 \qquad (-a) \cdot b = a(-b) = -a \cdot b \qquad (-a)(-b) = a \cdot b$$

$$a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \qquad a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \text{ con } b, d \neq 0 \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ con } b, d \neq 0.$$

Note que en general,

$$\frac{1}{a + b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + c}{b + d}, \qquad \frac{ab + c}{a} \neq b + c \qquad \frac{ab + cd}{b + d} \neq a + c$$

3.2. Orden en los reales

El orden entre números reales es una relación entre números que, aunque intuitiva en casos concretos, necesitamos formalizar mediante algunos axiomas básicos, a los que hay que agregar luego la propiedad de continuidad de la recta real obtenida a partir del Axioma del Supremo. A partir de esos axiomas podremos justificar (demostrar) casi todas las propiedades de orden que necesitemos usar.

Denotamos la relación "a es menor que b", entre los números reales a y b, por $a < b$. De modo equivalente escribimos $b > a$. También usamos la notación $a \leq b$ o $b \geq a$ para denotar que "a es menor o igual a b", lo que se traduce a $a < b \vee a = b$. La negación de $a < b$ la denotamos por $a \not< b$, y de modo análogo en las otras variantes mencionadas.

Proposición 3.1. *El orden entre números reales satisface las siguientes propiedades (axiomas):*

1. *(Tricotomía) Para todos a y b en $\mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

$$a = b, \text{ o bien } a < b \text{ o bien } b < a.$$

2. *(Asimetría) Para todos a y b en $\mathbb{R}$ se cumple*

$$(a < b \to b \not< a).$$

3. *(Transitividad) Para todos a, b y c en $\mathbb{R}$ se cumple*

$$(a < b \wedge b < c) \to a < c.$$

4. *(Compatibilidad con la suma) Para todos a, b, c y d en $\mathbb{R}$ se cumple*

$$(a < b \wedge c < d) \to a + c < b + d.$$

5. *(Compatibilidad con el producto) Para todos a, b, c y d en $\mathbb{R}$ se cumple*

$$(0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d) \to 0 \leq ac < bd.$$

Como es habitual, que un número real a sea positivo lo denotamos por $a > 0$ y que sea no negativo lo denotamos por $a \geq 0$. Al conjunto de los números reales positivos los denotamos $\mathbb{R}^+$, al de los reales negativos por $\mathbb{R}^-$, y usamos $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}_0^- := \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Note que en general

$$\sim \forall x \in \mathbb{R}\big(x^2 \ \geq \ 1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 1\big) \qquad \text{y que} \qquad \sim \forall x \in \mathbb{R}\big(x^2 \ \leq 1 \Longleftrightarrow x \leq 1\big)$$

Elevar al cuadrado mantiene el orden entre positivos y lo invierte entre negativos:

1. si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$
2. si $a < b \leq 0$ entonces $a^2 > b^2$

Demuestre ambas propiedades.

Las propiedades algebraicas y de orden mencionadas se cumplen por igual para los números racionales y para los números reales. Pero los números racionales son incompletos en comparación con los números reales, no sólo porque los números racionales carecen de muchos números que sí pertenecen a los números reales (como $\sqrt{2}$) sino también por una característica que, entre otras cosas justifica globalmente que tales números pertenezcan a los números reales: el Axioma del Supremo, que vale para $\mathbb{R}$ pero no para $\mathbb{Q}$.

Axioma del Supremo (adaptado)

Para todo subconjunto no vacío A de los números reales para el cual exista un número real c tal que $A \subset\ ]-\infty, c]$ (A es acotado superiormente) existe un único número real α que cumple:

1. *$A \subset\ ]-\infty, \alpha]$ (α es cota superior de A)*
2. *Todo $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $x < \alpha$ cumple también $A \not\subset\ ]-\infty, x]$ (α es la menor cota superior de A)*

Tal α se denomina "supremo del conjunto A" y actúa como si fuera el mayor elemento de A, aunque no pertenezca a él; de hecho, si el supremo de un conjunto pertenece al conjunto, es el mayor elemento del conjunto. El supremo de un conjunto es la menor cota superior del conjunto. Por ejemplo, 3 es el supremo de los intervalos $]0, 3]$ (es máximo en ese caso) y $]0, 3[$ (es supremo, pero no máximo). Pero no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es un intervalo: 1 es el supremo del conjunto $\{\frac{n-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y ese conjunto no es un intervalo.

De forma análoga se tiene ínfimo de un conjunto y su existencia en los reales es consecuencia del Axioma del Supremo.

El conjunto de los números racionales no cumple con el análogo del Axioma del Supremo: por ejemplo, el supremo del conjunto de racionales $\{x \in \mathbb{Q} \ : \ 0 < x \wedge x^2 < 2\}$ debiera ser $\sqrt{2}$, el cual no es un número racional. El mismo conjunto de racionales, como subconjunto de $\mathbb{R}$, tiene a $\sqrt{2}$ por supremo, y de hecho ello garantiza la existencia de raíz de dos en los números reales. Y de π, de $\sqrt{\pi}$ y un infinito etcétera. Ello no se obtiene a partir de las demás propiedades algebraicas ni de orden mencionadas antes.

3.3. Raíces cuadradas.

Del mismo modo que para $\sqrt{2}$, para todo número real no negativo b se puede asegurar la existencia de un número real no negativo cuyo cuadrado sea b (es decir, tal que a se araíz cuadrada de b): basta asegurar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \wedge x^2 < b\}$ no es vacío y es acotado superiormente, y el Axioma del Supremo nos garantiza la existencia de a que cumpla $a^2 = b$.

De ese modo, la siguente definición es válida:

Definición 3.2. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ diremos que $a = \sqrt{b}$ si y sólo si $b \geq 0 \wedge a \geq 0 \wedge a^2 = b$.*

Note que tanto b como a deben ser no negativos para tener $a = \sqrt{b}$, aunque también se cumple que $(-a)^2 = b$. No es lo mismo "raíz cuadrada de b" que "solución de la ecuación $x^2 = b$": tanto $\sqrt{b}$ como $-\sqrt{b}$ son las soluciones de esa ecuación.

Note que $\sqrt{0} = 0$.

Proposición 3.2. *Para todos x e y en $\mathbb{R}$ se cumplen:*

1. *Si $x \geq 0$, entonces $(\sqrt{x})^2 = x$*
2. *Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$, entonces $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$*
3. *Si $x \geq 0$ e $y > 0$, entonces $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$*
4. *Si $0 \leq x < y$ entonces $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.*
5. *Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$, entonces $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ y la igualdad sólo ocurre si $x = 0$ o $y = 0$.*

3.4. Valor Absoluto.

Definición 3.3. *Se llama valor absoluto del número real x al número real que denotamos $|x|$ y tal que*

$$|x| = \begin{cases} x & si \ x \ \geq \ 0 \\ -x & si \ x \ < \ 0 \end{cases}$$

Se tiene de la definición que $|\frac{2}{5}| = \frac{2}{5}$, $|\frac{-3}{7}| = -(-\frac{3}{7}) = \frac{3}{7}$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Propiedades

1. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ |x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$.

2. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ |x| = \sqrt{x^2}$.

3. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \ |xy| = |x||y|$.

4. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ -|x| \leq x \leq |x|$.

5. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \ |x + y| \leq |x| + |y|$. (Desigualdad triangular).

Dem: 1.- Se obtiene directamente de la definición de valor absoluto.

2.- Usemos la demostración por casos.

$x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow |x|^2 = x^2$.

$x < 0 \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow |x|^2 = x^2$.

Luego se tiene que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ |x| = \sqrt{x^2}$.

3.- $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \ |xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$.

4.- Ejercicio.

5.- Por las Propiedades 4 y 3 se tiene que $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \ xy \leq |xy| = |x||y|$ Luego: Si $x = 0 \vee y = 0$ se cumple claramente la propiedad 5. Sean $x \neq 0, y \neq 0$, entonces

$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = |x|^2+2xy+|y|^2 \leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2$. Como $|x + y|, |x| + |y| > 0$, se tiene que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Más propiedades. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$:

6.- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

7.- $|x| \geq a \iff x \geq a \ \vee\ x \leq -a$.

Dem: Ejercicio.

4. Funciones

4.1. Nociones básicas de funciones

Definición 4.1. *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una* función *f de A en B es un objeto matemático que asigna a cada objeto x de A un único objeto $f(x)$ de B.*

En una función $f : A \to B$ el símbolo "f" es un nombre para la función, al conjunto A se le denomina dominio de la función *(denotado $dom(f)$) y al conjunto B se le denomina* codominio *de la función (denotado $cod(f)$).*

Usaremos $f : A \to B$ para afirmar que f es una función de A en B y, por abuso de notación, $f : A \to B$ también nos servirá para referirnos a la función f, haciendo explícitos su dominio y codominio.

Debe tomarse en cuenta que una función que cumpla $f : A \to B$ es un objeto con tres componentes: dominio (A), codominio (B) y la regla de asignación $x \mapsto f(x)$; en cambio, existe la errada consideración (incluso en algunos textos) de que una función es sólo una "ecuación" del tipo $y = f(x)$, lo que lleva a perder de vista no sólo el objeto "función" como tal, sino a complicar su aplicación a situaciones diversas.

Tomando en consideración lo anterior, en este curso **lo habitual** será que, para una función $f : A \to B$, A y B sean subconjuntos de $\mathbb{R}$, y que la función se determine mediante una *regla de asignación* $f(x)$, para $x \in A$, dada por alguna expresión algebraica.

Ejercicio 4.1. *Definimos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicando su regla de asignación mediante la igualdad $f(x) = 3x + 48$. Ello significa que la imagen de cada valor se* calcula *usando esa regla de asignación, de modo que $f(1) = 3 * 1 + 48 = 51$ y $f(22,5) = 115,5$.*

Note que siempre se cumple que $f : dom(f) \to cod(f)$. En particular, al afirmar que $f : A \to B$ siempre se cumplen $A = dom(f)$ y $B = cod(f)$.

Como el conjunto referencial será, en general, $\mathbb{R}$, en muchos casos dominio y/o codominio no se darán explícitamente. Si no se indica explícitamente, el codominio será $\mathbb{R}$. En cambio, si no se da explícitamente el dominio, se asume que buscamos para el dominio al mayor subconjunto posible de $\mathbb{R}$, dadas la regla de asignación y el codominio.

Proposición 4.1. 1. *El dominio más amplio para una función $f : dom(f) \to \mathbb{R}$, con $dom(f) \subset \mathbb{R}$ y con regla de asignación dada, es*

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

2. *Si B es un subconjunto fijo de $\mathbb{R}$, el dominio más amplio para una función $f : dom(f) \to B$, con $dom(f) \subset \mathbb{R}$ y con regla de asignación dada, es*

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in B\}$$

Ejercicio 4.2. *Para determinar el dominio máximo de una función $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ con regla de asignación $f(x) = \frac{1}{x+2}$ para $x \in A$, calculamos $dom(f)$ según la propiedad anterior:*

$$\begin{aligned} dom(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x + 2 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[\end{aligned}$$

Por otra parte, en diversas aplicaciones se esperan un dominio o un codominio restringido por la misma aplicación. Es el caso de funciones cuyo resultado es temperatura, en que carece de sentido que el resultado de la medición sea inferior a -273,15 C°, sin importar si la regla de asignación de la función puede entregar valores inferiores.

Ejercicio 4.3. *Para determinar el dominio máximo de una función $f : dom(f) \to]-273, \infty[$, con $dom(f) \subset \mathbb{R}$ y con regla de asignación $f(x) = 3x + 5$, $x \in dom(f)$, usamos nuevamente la propiedad anterior:*

$$\begin{aligned} dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in]-273, \infty[\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -273 < 3x + 5\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{-273 - 5}{3} < x\right\} = \left]\frac{-278}{3}, \infty\right[\end{aligned}$$

El codominio de una función es el conjunto al que pertenecen los *resultados* de una función, pero no siempre es igual al conjunto de resultados de la función.

Definición 4.2. *Sea $f : dom(f) \to B$ una función. El* recorrido *de f (también llamado* imagen *de f), denotado $rec(f)$, es el conjunto*

$$rec(f) := \{f(x) \in B \ : \ x \in dom(f)\}$$

El recorrido de una función es el subconjunto del codominio formado por las imágenes de los elementos del domino al aplicarles la función.

Proposición 4.2. *Dada una función $f : A \to B$ se cumple:*

$$rec(f) = \{y \in B \ : \ \exists x \in A \ y = f(x)\}$$

Ejercicio 4.4. *Para determinar el recorrido de $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 9$, $x \in [1, 6]$, utilizamos la propiedad anterior:*

$$\begin{aligned} rec(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in [1, 6] \ y = 2x - 9\} = \left\{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in [1, 6] \ x = \frac{y + 9}{2}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq \frac{y + 9}{2} \leq 6\right\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ 2 \leq y + 9 \leq 12\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ -7 \leq y \leq 3\} = [-7, 3] \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5. *Sea $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ función dada por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, con $dom(f) \subset \mathbb{R}$. Encuentre dominio y recorrido más amplios para f.*

Solución: dom(f) $= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (2 - x)(2 + x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \leq x \leq 2\}$ Para llegar a esta última conclusión analizar que para que el producto de dos factores sea positivos, los dos son positivos o los dos son negativos.

Además, $rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \ \in \mathbb{R} \ y = \sqrt{4 - x^2}\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \wedge \exists x \ \in \mathbb{R} \ x^2 + y^2 = 4\}$

$$\begin{aligned} &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \wedge \exists x \ \in \mathbb{R} \ x^2 = 4 - y^2\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \wedge 4 - y^2 \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \wedge \exists x \ \in \mathbb{R} \ -2 \leq y \leq 2\} = [0, 2] \end{aligned}$$

Ejercicio 4.6. *Sea $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = x^2 + 1$. Pruebe que $dom(F) = \mathbb{R}$, y que $rec(F) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 1\}$, ambos los más amplios.*

Ejercicio 4.7. *Sea $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Encuentre dominio y recorrido más amplios para f.*

Solución: $dom(F) = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{x+3}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Además } rec(F) &= \left\{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \ \in \mathbb{R} \ y = \frac{x+3}{x-2}\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \ \in \mathbb{R} - \{2\} \ x(y-1) = 3 + 2y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\} \end{aligned}$$

Para comprender las igualdades de conjuntos indicadas, considere:
Como $x \in dom(f)$, tenemos $x \neq 2$ y entonces $y = \frac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow yx - 2y = x + 3 \Leftrightarrow x(y-1) = 3 + 2y$ y si $y = 1$ se tendría $0 = 5$ lo que es falso.

Ejercicio 4.8. *Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \ \ x > 0 \\ 2x - 3 & si \ \ x \ \leq \ 0 \end{cases}$$

Calcule $f(a^2 + 5), f(-\sqrt{5})$ y calcule recorrido.

Solución: *La función f es un ejemplo de función definida por casos (también llamada por tramos), en que para distintos subconjuntos del dominio la regla de asignación cambia de forma. En este caso, los subconjuntos son intervalos contiguos.*

Resolviendo la primera parte: $a^2 + 5 \ > \ 0$, luego $f(a^2+5) = (a^2+5)^2 + 1 = a^4 + 10a^2 + 26$.
$f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5} - 3$.

Para calcular el recorrido, observe que el recorrido será la unión de los recorridos "parciales" que entrega cada subintervalo con su propia regla de asignación:

$$\begin{aligned} rec_1(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x > 0 \ y = x^2 + 1\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x > 0 \ y - 1 = x^2 > 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ y - 1 > 0\} =]1, \infty[\\ rec_2(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \leq 0 \ y = 2x - 3\} = \left\{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \leq 0 \ \frac{y+3}{2} = x \leq 0\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ y + 3 \leq 0\} =]-\infty, -3] \end{aligned}$$

Luego, $rec(f) = rec_1(f) \cup rec_2(f) =]-\infty, -3] \cup]1, \infty[$

4.2. Álgebra de funciones

Sean $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$. Dadas dos funciones $F : A \to B, \quad G : C \to D$, se definen las siguientes funciones:

i) Suma $F + G : A \cap C \to B \cup D$, definida por $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$ para todo $x \in A \cap C$.

ii) Producto: $FG : A \cap C \to B \cup D$, definida por $(FG)(x) = F(x)G(x)$ para todo $x \in A \cap C$.

iii) Multiplicación por escalar: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda F : A \to \mathbb{R}$, definida por $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$ para todo $x \in A \cap C$.

i) Cociente: $\frac{F}{G} : \{x \in A \cap C \ \mid \ G(x) \neq 0\} \to B \cup D$, definida por $\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ para todo $x \in \{x \in A \cap C \ \mid \ G(x) \neq 0\}$.

Ejercicio 4.9. *Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 20$, y*

$$g(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad 1 \leq x < 4 \\ 3 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Calcule, $f + g, fg, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$.

4.3. Composición de funciones

Sean $F : A \to B, \quad G : B \to C$, funciones. La función $G \circ F : A \to C$, definida por $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ para todo $x \in A$, se llama **la función compuesta de** F **y** G.

Nota: Sean $F : A \to B, \quad G : C \to D$, funciones. Entonces si $\mathrm{rec}(F) \cap \mathrm{dom}(G) \neq \emptyset$, la composición existe y $\mathrm{dom}(G \circ F) = \{x \in \ \mathrm{dom}(F) \ \mid \ F(x) \in \ \mathrm{dom}(G) \ \}$

La Figura 2 ilustra el mecanismo; en ese caso $A = \{a, b, c\}$, $B = C = \{p, q, r, s\}$ y $D = \{t, u, v, w\}$, $f_1 = \{(a, q), (b, r), (c, s)\}$, $f_2 = \{(p, t), (q, u), (r, w)\}$, de donde $f_2 \circ f_1 = \{(a, u), (b, w)\}$ o mejor $f(a) = u$ y $f(b) = w$.

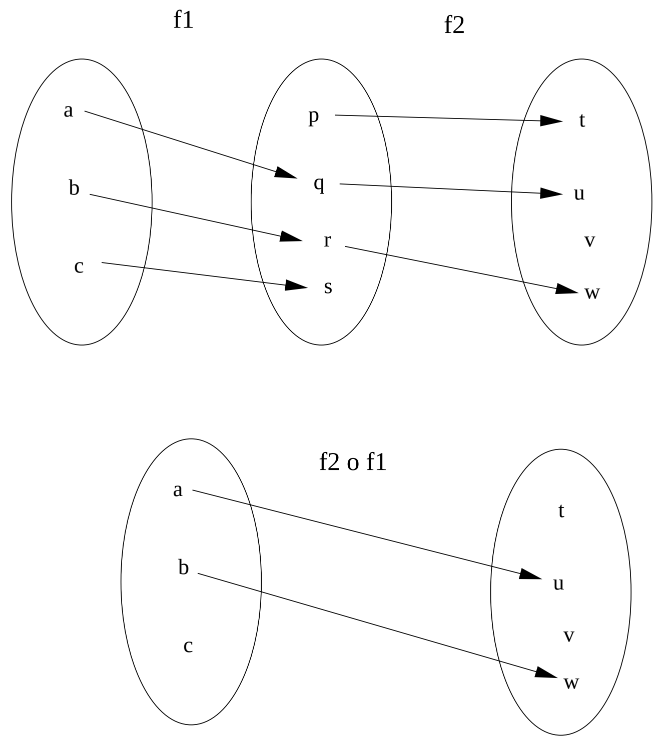


Figura 2: Idea de la composición de funciones.

Ejercicio 4.10. *Sean* $F : \mathbb{R}^{-} \to \mathbb{R}^{+}, \quad G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, *funciones definidas por* $F(x) = -x, \;\; G(x) = x^2$. *Calcular* $(G \circ F)(-5)$ *y determine para que valores de* x *existe* $(G \circ F)(x+3)$.

Ejercicio 4.11. *Suponga que el costo total en pesos de fabricar* q *unidades de determinado producto está dado por la función* $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.

a) Calcular el costo de producir 10 unidades del producto.

b) Calcular el costo de producir la décima unidad del producto.

Solución: a) El costo de producir 10 unidades del producto $= C(10) = 10^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200 = 3200$ pesos.

b) El costo de producir la décima unidad del producto es la diferencia entre el costo de fabricación de 10 unidades y el costo de fabricación de 9 unidades. Es decir, costo de la décima unidad $= C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201$ pesos.

Ejercicio 4.12. *Suponga que la función* $y = F(x) = 50+2x$ *representa el salario semanal que percibe un vendedor, el que se encuentra determinado por el número de unidades* x *vendidas en la semana. Si a esto agregamos que la cantidad* x *vendida semanalmente depende del precio del producto y que tal cantidad está dada por* $x = G(p) = 150 + 2,5p$ *entonces el sueldo semanal se puede expresar directamente en función del precio por unidad. ¿Cuál es esta función ?*

Solución: $y = F(G(p)) = F(150 + 2,5p) = 2(150 + 2,5p) + 50 = 350 + 5p$.

Para un caso concreto, si el producto se vende a 100 pesos en una semana, entonces la cantidad que puede vender es $x = 150 + 2,5 \cdot 100 = 400$ unidades. Esto le reporta un sueldo en esa semana de $y = F(400) = 2 \cdot 400 + 50 = 850$ pesos.

4.4. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición 4.3. *Sea* $f : dom(f) \to cod(f)$ *función. Diremos que:*

1. f *es sobreyectiva ssi* $rec(f) = cod(f)$
2. f *es inyectiva ssi* $\forall x, y \in dom(f)\ \big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$
3. f *es biyectiva ssi* f *es inyectiva y sobreyectiva.*

4.5. Gráfica de algunas funciones básicas.

4.5.1. Producto cartesiano, plano cartesiano y gráfica.

Definición 4.4. *Dados dos objetos x e y, su par ordenado (x, y) es un objeto matemático compuesto por x e y que distingue el orden entre ellos. La propiedad fundamental de par ordenado es:*

$$\forall a, b, c, d\ \big((a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)\big)$$

Definición 4.5. *Sean A y B dos conjuntos. Su producto cartesiano es el conjunto $A \times B$ definido por $A \times B := \big\{(x, y)\ \mid\ x \in A \wedge y \in B\big\}$*

En general el producto cartesiano no es conmutativo.

El producto cartesiano $A \times A$ se abrevia por A^2. No se entusiasme con propiedades de potencias.

El plano cartesiano se puede describir mediante un sistema coordenado usando $\mathbb{R}^2$ como conjunto de coordenadas. Se fijan dos copias de igual escala entre sí de $\mathbb{R}$ como dos rectas, llamados ejes coordenados, que son ortogonales (perpendiculares) de modo que uno de ellos, el eje X, es horizontal y sus valores crecen a la derecha, mientras que el otro, eje Y, es vertical y sus valores crecen hacia arriba; ambos ejes se intersectan en el punto que en cada recta corresponde al 0. A ese punto de intersección se le llama el origen del sistema y se le asignan las coordenadas $(0, 0)$. Para asignar la posición de cualquier otro punto P del plano se construye un rectángulo que tenga lados adyacentes a los ejes coordenados y que en vértices opuestos tenga a $(0, 0)$ y a P; entonces uno de los otros vértices marca en el eje X un número, x, y el vértice que queda marca en el eje Y un número, y, y le asignamos a P las coordenadas (x, y).

Graficar un conjunto de puntos es resaltarlos en el plano, y si contamos con la descripción de esos puntos como pares ordenados (fijados los ejes coordenados) su gráfica será resaltar los puntos que tengan esas coordenadas.

Definición 4.6. *Dada una función $f : dom(f) \to \mathbb{R},\ y = f(x)$, se llama gráfica de f al conjunto de puntos del plano $(x, f(x))$, donde $x \in dom(f)$.*

4.5.2. Función lineal

La gráfica de una función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x) = mx + n,\ m \neq 0$ se llama una línea recta y m se llama la pendiente de la recta.

Intersecciones con los ejes: Eje $Y : (0, n)$, Eje $X : (-\frac{n}{m}, 0)$.

Ejercicio 4.13. *Grafique la recta de ecuación* $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución: Despejando y en la ecuación dada queda $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$, luego la pendiente es $m = \frac{3}{7} > 0$ intersecta al eje Y en $(0, \frac{5}{7})$ y al eje X en $(-\frac{5}{3}, 0)$.

4.5.3. Función cuadrática

La función cuadrática básica es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$

4.5.4. Función valor absoluto

La función valor absoluto es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$

4.5.5. Función raíz cuadrada

Función raíz cuadrada es la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y = f(x) = \sqrt{x}$, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Además $y = \sqrt{x} \Longleftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y^2 = x)$.

4.5.6. Función recípoca

Función recípoca es la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ y = f(x) = \frac{1}{x}$.

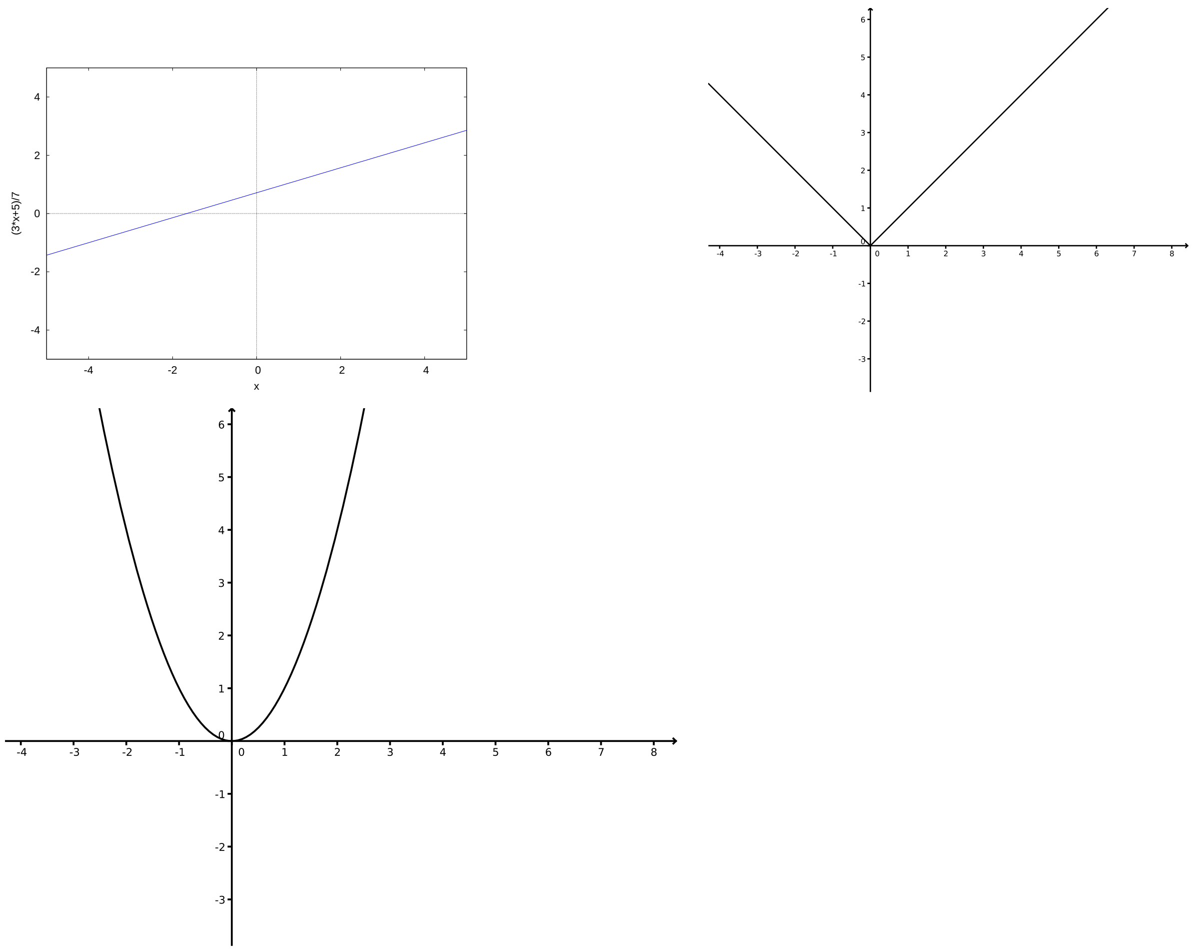


Figura 3: Funciones lineal, valor absoluto y cuadrática básica

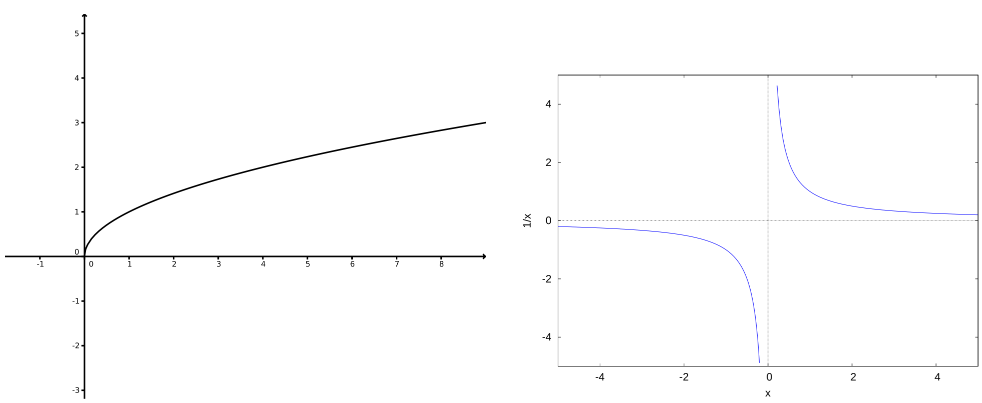


Figura 4: Funciones raíz y recíproca

4.6. Modificaciones a la gráfica de funciones básicas

Veamos una aplicación de la composición de funciones.

Sea $F : dom(F) \to \mathbb{R},\ y = F(x)$ función. Sea $k \in \mathbb{R},\ k\ > 0$. Entonces

1. $G : dom(F) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(x) + k$ es la función F **trasladada hacia arriba** k **unidades,** donde $G(x) = H \circ F$, con $H(x) = x + k$, para cada x y dom(G) =dom(F).

2. $G : dom(F) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(x) - k$ es la función F **trasladada hacia abajo** k **unidades,** donde $G(x) = H \circ F$, con $H(x) = x - k$, para cada x y dom(G) =dom(F).

3. $G : dom(G) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(x + k)$ es la función F **trasladada hacia la izquierda** k **unidades,** donde $G(x) = F \circ H$, con $H(x) = x + k$, para cada x y dom$(G) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x + k \in dom(F)\}$.

4. $G : dom(G) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(x - k)$ es la función F **trasladada hacia la derecha** k **unidades,** donde $G(x) = F \circ H$, con $H(x) = x - k$, para cada x y dom$(G) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x - k \in dom(F)\}$.

5. $G : dom(G) \to \mathbb{R},\ G(x) = -F(x)$ es la función F **reflejada en el eje X**, donde $G(x) = H \circ F$, con $H(x) = -x$ para cada x y dom(G) =dom(F).

6. $G : dom(G) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(-x)$ es la función F **reflejada en el eje Y**, donde $G(x) = F \circ H$, con $H(x) = -x$ para cada x y dom$(G) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ -x \in \text{dom}(F)\}$.

7. $G : dom(F) \to \mathbb{R},\ G(x) = kF(x)$ es la función F **amplificada verticalmente** por k si $k > 1$ o **comprimida verticalmente** por k si $0 < k < 1$, donde $G(x) = H \circ F$, con $H(x) = kx$, para cada x y dom(G) =dom(F).

8. $G : dom(F) \to \mathbb{R},\ G(x) = F(kx)$ es la función F **amplificada horizontalmente** por k si $0 < k < 1$ o **comprimida horizontalmente** por k si $k > 1$, donde $G(x) = F \circ H$, con $H(x) = kx$, para cada x y dom$(G) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ kx \in dom(F)\}$.

La gráfica de una función cuadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ es una parábola, ya que completando cuadrados se llega a una ecuación de la forma $y=a(x-h)^2+k$ que corresponde a una parábola trasladada, su vértice es (h,k) donde $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f(h)$.

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ la ecuación de una parábola de vértice $V=\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$ entonces

1. Si $a>0$, la gráfica se abre hacia arriba.

2. Si $a<0$, la gráfica se abre hacia abajo.

Ejercicio 4.14. *Grafique la función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=2x^2-4x-1$.

Solución: Si completamos el cuadrado en x, la ecuación $y=2x^2-4x-1$ queda $y=2(x^2-2x+1)-3=2(x-1)^2-3$, o bien $y+3=2(x-1)^2$, que corresponde a una parábola que se abre hacia arriba y su vértice está en el punto $(1,-3)$.

Ejercicio 4.15. *Grafique* $F:[3,\infty)\to\mathbb{R}, y=F(x)=\sqrt{x+3}-6$.

Solución: La gráfica de $y=F(x)$ es la gráfica de $y=\sqrt{x}$ trasladada 3 unidades a la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

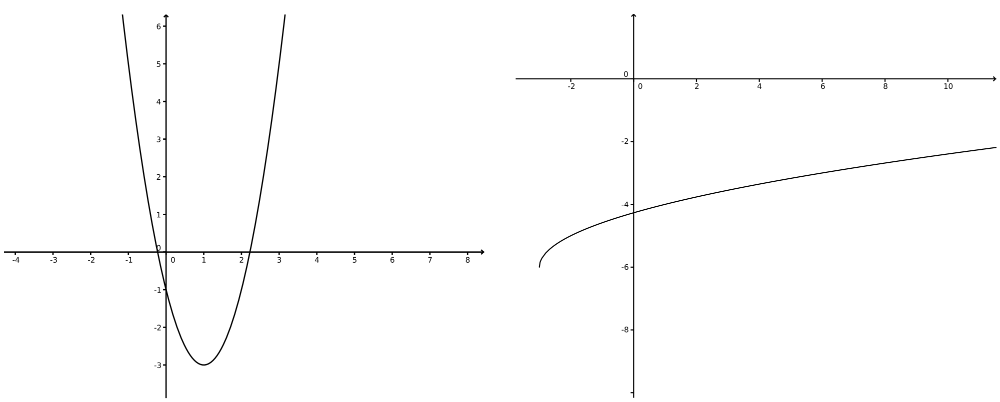


Figura 5: Función cuadrática del ejemplo 4.14 y función raíz del ejemplo 4.15

Ejercicio 4.16. *Grafique* $F:\mathbb{R}-\{-7\}\to\mathbb{R}, y=F(x)=\frac{1}{x+7}+5$.

Solución: La gráfica de $y=F(x)$ es la gráfica de $y=\frac{1}{x}$ trasladada 7 unidades a la izquierda y 5 unidades hacia arriba. Las rectas $y=5$ y $x=-7$ cumplen la misma función que para la función recíproca original cumplen los ejes coordenados, y son las *asíntotas* de la gráfica.

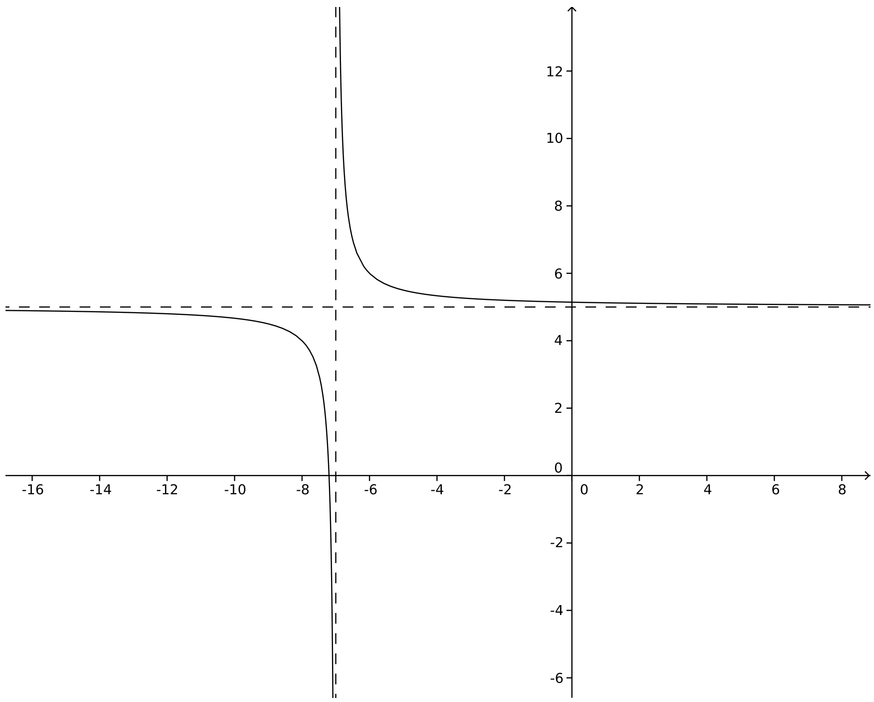


Figura 6: Función del ejemplo 4.16 con asíntotas de apoyo.

5. Desigualdades e inecuaciones

Ya conocemos propiedades básicas de orden. Ello origina propiedades más complejas que afirman que ciertas desigualdades son válidas para todos los valores factibles.

Ejercicio 5.1. *Si x e y son números reales distintos de cero y tienen igual signo, entonces se cumple la desigualdad $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (basta reescribir $(x-y)^2 \geq 0$).*

Ejercicio 5.2. *Para todos los números reales x e y se cumple $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ (basta considerar que $(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ y tomar en cuenta los signos posibes)*

Pero las propiedades de orden pueden usarse para determinar los valores en $\mathbb{R}$ (o en otros conjuntos numéricos) que hagan verdadera a una desigualdad; a ello se le llama *resolver una inecuación*. En tal caso, la solución de la inecuación es el conjunto de todos los números que hacen verdadera a al desigualdad. La diferencia entre inecuaciones y propiedades de desigualdades es que en una inecuación se buscan los valores que validan la desigualdad, mientras que una propiedad afirma que tales valores son todos los factibles (dejando fuera sólo aquellos que estén fuera del dominio máximo de las funciones involucradas, como en el ejemplo 5.1)

Ejercicio 5.3. *Para resolver la inecuación $x^2 - 3x > 0$, buscamos su conjunto solución, es decir, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x > 0\}$. Para ello, consideremos las siguientes equivalencias, donde $x \in \mathbb{R}$ es genérico:*

$$x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \underset{\text{(regla de signos)}}{\Leftrightarrow} \Big((x > 0 \wedge (x-3) > 0) \vee (x < 0 \wedge (x-3) < 0)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big((x > 0 \wedge x > 3) \vee (x < 0 \wedge x < 3)\Big)$$

(pero $(x > 0 \wedge x > 3) \Leftrightarrow x > 3$ y $(x < 0 \wedge x < 3) \Leftrightarrow x < 0$)

$$\Leftrightarrow \big(x > 3 \vee x < 0\big) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$$

Luego, el conjunto solución es $S =]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$

La herramienta fundamental en inecuaciones simples es la regla de signos: el producto o cociente de dos factores reales es positivo ssi ambos factores tienen igual signo. Ello se extiende a más factores multiplicados o divididos, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejercicio 5.4. *Resolver* $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$.

Solución: Basta ver los signos de $(x-1)$, $(x-2)$ y $(x-3)$ Como cada uno de esos factores cambia de signo en un sólo punto, analizo sus signos en los intervalos que todos ellos determinan, tomando en cuenta que los factores del numerador no pueden ser cero porque la desigualdad es estricta, y el factor del denominador no puede ser cero para no dividir por cero:

1. Para $x \in (-\infty, 1)$ se tiene $(x-1) < 0$, $(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} < 0$, así que **no** es parte de la solución.
2. Para $x \in (1,2)$se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) < 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$, así que **sí** es parte de la solución.
3. Para $x \in (2,3)$ se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) > 0$ y $(x-3) < 0$. Luego, en este intervalo $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} < 0$, así que **no** es parte de la solución.
4. Para $x \in (3,\infty)$ se tiene $(x-1) > 0$, $(x-2) > 0$ y $(x-3) > 0$. Luego, en este intervalo $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$, así que **sí** es parte de la solución.

(recuerde que (a,b) y $]a,b[$ son dos formas de representar un intervalo abierto)
Luego, la solución es la *unión* de los casos que hacen verdadera la desigualdad: $(1,2)\cup(3,\infty)$

El análisis anterior se puede resumir en una *Tabla de Signos*, en la cual dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos, en cada uno de los cuales cada factor tiene un signo definido: para ello, se consideran todos los puntos en que algún factor cambia de signo, y con ellos formamos los intervalos. Esos puntos “borde” se incluyen o no según si la desigualdad es estricta o no, y si pertenecen al dominio máximo de las funciones involucradas o no.:

	$-\infty$	1	2	3	∞
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

La Tabla de Signos responde también que el conjunto solución es $(1,2)\cup)$

Ejercicio 5.5. *Resolver* $\dfrac{x-5}{(2x^2+7)} > 0.$

Solución: Notemos que el factor del denominador no puede ser cero pues $2x^2 \geq 0$ y $7 > 0$. Luego resolver la inecuación $\dfrac{x-5}{(2x^2+7)} > 0$ equivale a resolver la inecuación $x-5 > 0$, cuya solución es $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\} = [5,\infty)$. Luego la solución final es $[5,\infty) \cap \mathbb{R} = [5,\infty)$.

En el caso de haber raíces en una inecuación, deben considerarse las restricciones de signo involucradas en raíces cuadradas:

Ejercicio 5.6. *Resuelva la siguiente inecuación* $\sqrt{x-2} < 4-x$.

Solución: $\sqrt{x-2} < 4-x \iff (x-2 \geq 0 \wedge 4-x > 0 \wedge (x-2) < (4-x)^2) \iff (2 \leq x < 4 \wedge 0 < x^2-9x+18)$ es decir, $2 \leq x < 4$ y $0 < (x-3)(x-6)$. Luego, se tiene que $2 \leq x < 4$ y $(x < 3 \vee 6 < x)$. Entonces, la solución es $[2,3)$.

Ejercicio 5.7. *Resuelva la siguiente inecuación* $2x-1 > \sqrt{x^2-3x}$.

Solución: $x^2-3x \geq 0 \iff x(x-3) \geq 0 \iff x \geq 3 \ \vee \ x \leq 0$

Luego cualquier solución debe cumplir $x \geq 3 \ \vee \ x \leq 0$

Además como $x^2-3x \geq 0$ se tiene que $\sqrt{x^2-3x} \geq 0$ luego $2x-1 > 0$ es decir $x > \frac{1}{2}$. Analicemos ahora la inecuación si $x > \frac{1}{2}$.

$2x-1 > \sqrt{x^2-3x} \iff (2x-1)^2 > x^2-3x \iff 4x^2-4x+1 > x^2-3x \iff 3x^2-x+1 > 0$, y como $\Delta = 1-4\cdot 3\cdot 1 = -11 < 0$, la ecuación $3x^2-x+1 > 0$, vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego la solución parcial es $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}$ y la solución general de la inecuación es $S = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \ \vee \ x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \ \vee \ x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, \infty)$

Ejercicio 5.8. *Resuelva las siguientes desigualdades o inecuaciones*

a) $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} < 3$.

Ejercicio 5.9. *Resuelva la siguiente inecuación* $|x+3| < 5x + 2$.

Solución: $|x+3| < 5x+2 \iff -(5x+2) < x+3 < 5x+2$,

es decir, $-(5x+2) < x+3 \wedge x+3 < 5x+2$.

Luego, $-6x < 7 \wedge -4x < -1$

Finalmente, $x > -\frac{7}{6} \wedge x > \frac{1}{4}$.

La solución es: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{4}\} = (\frac{1}{4}, \infty)$

Ejercicio 5.10. *Resuelva la siguiente inecuación* $|x+3| > 6x + 1$.

Ejercicio 5.11. *Resuelva la siguiente inecuación* $|x-2| + |x+2| \leq 4$.

Ejercicio 5.12. *Resuelva la siguiente inecuación* $|(x+3)(x-2)| > 6$.

Ejercicio 5.13. *Resuelva la siguiente inecuación* $\frac{|x-2|+|x+2|}{x-5} \leq 4$.

6. Inducción, sumatorias y Teorema del Binomio

6.1. Inducción Matemática

Definición 6.1. *Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se dice inductivo si y sólo si*

1. $1 \in S$

2. $x \in S \Longrightarrow (x+1) \in S$

Teorema 6.1. *La intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$.*

Con esto $\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$.

Teorema 6.2. *Si a cada número natural n se le asocia una proposición $p(n)$, la que verifica*

1. *$p(1)$ es verdadera.*

2. *$p(k)$ verdadera implica que $p(k+1)$ es verdadera*

entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(p(n)\big)$.

En efecto, sea $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{p(n) es verdadera }\}$ entonces S es subconjunto de $\mathbb{N}$. Además S es un conjunto inductivo. Como $\mathbb{N}$ es el menor de los conjuntos inductivos se tiene que $\mathbb{N} \subseteq S$. Luego $S = \mathbb{N}$. Por lo tanto la proposición es verdadera para todo número natural n.

El resultado anterior se conoce como **Principio de Inducción Matemática**

Ejercicio 6.1. *Probemos que* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1$ *es divisible por* 3.

Solución: El concepto de divisibilidad en $\mathbb{Z}$ indica que un número a es divisible por b si existe un número entero t tal que $a = bt$. Por ejemplo 6 es divisible por 2 y por 3. Usaremos el P.I (principio de inducción Matemática). Sea $p(n) : 4^n - 1$ es divisible por 3.

$n = 1$, veamos que $p(1)$ es verdadera. Pero $4^n - 1 = 3$ que es divisible por 3. Luego $p(1)$ es verdadera.

Hipótesis de inducción: Supongamos que $p(k)$ es verdadera, es decir, $4^k - 1$ es divisible por 3, es decir, existe $q \in \mathbb{Z}$ con $4^k - 1 = 3q$

Tesis: Por demostrar que $p(k+1)$ es verdadera, es decir, $4^{k+1} - 1$ es divisible por 3.

Demostración: $4^{k+1} - 1 = 4^k \cdot 4 - 1 = (4^k - 1)4 + 4 - 1 = 3q4 + 3 = 3(4q+1)$. Luego, como $4q + 1 \in \mathbb{Z}$ entonces $4^{k+1} - 1$ es divisible por 3. Por principio de Inducción, $\forall n \in \mathbb{N}\ 4^n - 1 = 3$ que es divisible por 3.

Ejercicio 6.2. *Pruebe por inducción las siguientes afirmaciones:*

1. $\forall\ n \in \mathbb{N} \left(1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$.
2. $\forall\ n \in \mathbb{N} \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$
3. $\forall\ n \in \mathbb{N} \left(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2\right)$
4. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall r \in \mathbb{R} - \{1\} \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)$
5. $\forall\ n \in \mathbb{N} \left(2^n > n\right)$.

Un forma del Principio de Inducción establece que si se cumple una propiedad para los primeros números naturales, y cada vez que se cumple para todos los naturales menores a alguno, se cumple para éste también, entonces es válido para todos los náturales.

Ejercicio 6.3. *Considere la siguiente colección de números reales:*

$$A_1 = 5,\ A_2 = 11, \quad A_{t+1} = 7A_t - 12A_{t-1} \quad \text{para } t \in \mathbb{N} \text{ y } t \geq 2$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{n+1} - 4^n$.

Solución: Usaremos el principio de inducción Matemática.

Sea $p(n) : A_n = 3^{n+1} - 4^n$.

$n = 1$, veamos que $p(1)$ es verdadera. Tenemos que $3^{1+1} - 4^1 = 9 - 4 = 5 = A_1$.

Luego $p(1)$ es verdadera.

Como se requieren los valores de A_t y de A_{t-1} para calcular el valor de A_{t+1}, verificamos también $p(2)$ (de lo contrario, no podremos asegurar que se cumpla desde $n = 3$ en adelante)

Para ver que $p(2)$ es verdadera, calculamos: $3^{2+1} - 4^2 = 27 - 16 = 11$ y como $A_2 = 11$, se cumple $p(2)$

Hipótesis de inducción: Supongamos que $p(k-1)$ y $p(k)$ son verdaderas [1], es decir,

$A_{k-1} = 3^k - 4^{k-1},\ A_k = 3^{k+1} - 4^k$.

Tesis: Por demostrar que $p(k+1)$ es verdadera, es decir, $A_{k+1} = 3^{k+2} - 4^{k+1}$.

Demostración: $A_{k+1} = 7A_k - 12A_{k-1} = 7(3^{k+1} - 4^k) - 12(3^k - 4^{k-1}) = 7 \cdot 3^{k+1} - 7 \cdot 4^k - 4 \cdot 3^{k+1} + 34^k = 3^{k+1}(7-4) - 4 \cdot 4^k = 3^{k+2} - 4^{k+1}$. Luego, $A_{k+1} = 3^{k+2} - 4^{k+1}$ y $p(k+1)$ es verdadera. Por principio de Inducción, $\forall n \in \mathbb{N} \left(A_n = 3^{n+1} - 4^n\right)$.

Ejercicio 6.4. *Considere la siguiente colección de números reales*

$$A_1 = 2$$

$$\textit{Para cada } t \in \mathbb{N} \ \textit{ se define } A_{t+1} = \frac{(A_t + 4)}{2}.$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n < 2$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n < A_{n+1}$.

6.2. Sumatorias

La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales se escribe

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que el término general de esta suma es de la forma i^2 y se obtiene cada sumando dando a i los valores $1, 2, 3, \cdots, n$. Existe un símbolo que permite escribir sumas en forma abreviada, llamado *símbolo de sumatoria* que consiste en la letra griega $\sum$ Usando este símbolo la suma anterior se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

[1] En rigor, suponemos que se cumplen $p(1), p(2), \ldots, p(k-1), p(k)$, pero en este caso basta con $p(k-1)$ y $p(k)$

se lee *suma de* i^2 *desde 1 hasta* n

Es claro que en lugar de la letra i se puede usar otra letra cualesquiera. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$. Las letras i, j, k que se usan para tal efecto se llaman índices.

Más en general, cuando se desea formar la suma de los números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n$: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ usando el símbolo de sumatoria se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

A veces es conveniente empezar la suma por el 0, por ejemplo

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

Otras formas de usar la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{6} 2^{i-1} = 1 + 2 + \cdots + 2^5$$

Nota Usando el símbolo de sumatoria las partes i) y ii) del Ejercicio 5.2 quedan

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

PROPIEDADES: Sean a_i, b_j números reales entonces:

1. $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$
2. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \quad \sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1$
3. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$
4. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
5. $\sum_{i=1}^{n}(ca_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
6. $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica)

7. Si $r \neq 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n} r^i = r\dfrac{1-r^n}{1-r}$ (suma geométrica)

8. Para todo $p \in \mathbb{Z}^+$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+p}^{n+p} a_{i-p}$ (desplazamiento de índices)

Ejercicio 6.5. *Use propiedades para demostrar*

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2. \textit{ Sugerencia } 2i-1 = i^2-(i-1)^2.$$

¿ Hay alguna otra forma de demostrar la fórmula anterior ?

Ejercicio 6.6. *Pruebe que para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

6.3. Factoriales y Binomio de Newton

Para cada $n \in N$, se define $n! = n \cdot (n-1)\cdots 2 \cdot 1$. (Se lee n factorial.) Prolongemos la definición poniendo $0! = 1$. Se tiene de inmediato que $n! = (n-1)!n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.7. *Demuestre por inducción:*

$$a)\; \frac{(2n)!}{n!} = 2^n[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)] \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b)\; \sum_{j=1}^{n}(j^2+1)\cdot j! = n(n+1)!. \quad c)\; \sum_{j=1}^{n} \frac{j \cdot 2^j}{(j+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Queremos encontrar un expresión para $(a+b)^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior podemos inferir que

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n,$$

con los coeficientes C_k^n a determinar. C_k^n representa también el número total de k combinaciones, de n objetos sin repetición y en que el orden no es importante. Por ejemplo, sea $n = 5$, representan las letras de la palabra SALEN, entonces si elegimos $k = 2$ de ellas entonces las combinaciones son: SA, SL, SE, SN,AL,AE, AN,LE, LN, EN. Hay 10 combinaciones.

¿ De cuántas maneras se pueden asignar 7 computadores individuales iguales entre 20 profesores ? Respuesta: C_7^{20} Definamos para $0 \leq k \leq n$,

$$C_k^n = \binom{m}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejercicio 6.8. *a) Sabiendo que* $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$*, calcule* n*.*

b) Sabiendo que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$*, calcule* k*.*

Ejercicio 6.9. *Demuestre que* $n > 11 \implies \binom{n}{6} > \binom{n}{5}$

Propiedades (demuéstrelas como ejercicios):

a) $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$.

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

c) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

d) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Observe que tanto en el numerador como en el denominador hay k factores.

A partir de las propiedades b) y c) podemos construir la tabla de todos los valores de $\binom{n}{k}$ para $0 \leq k \leq n$ conocida como *Triángulo de Pascal.*

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Por ejemplo:

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6.$

Usando las propiedades anteriores, se tiene el **Binomio de Newton**:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (*)$$

Demostremos esta fórmula por inducción sobre n.

Para $n = 1$, $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a b^0 + \binom{1}{1} a^0 b = a + b$,

luego la fórmula (*) vale para $n = 1$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que (*) vale para $n = t$, es decir,

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} a^{t-k} b^k \ \ (*)$$

Tesis: Por demostrar que (*) vale para $n = t + 1$. Por demostrar que

$$(a+b)^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} a^{t+1-k} b^k \ \ (*)$$

Demostración:

$$(a+b)^{t+1} = (a+b)^t (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} a^{t-k} b^k \right) (a+b) \text{ usando la hipótesis}$$

$$= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} a^{t+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} a^{t-k} b^{k+1} \ \text{ al distribuir}$$

$$= a^{t+1} + \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k} a^{t+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{t-1} \binom{t}{k} a^{t-k} b^{k+1} + b^{t+1}$$

al separar el 1er término de la primera sumatoria y el último de la segunda

$$= a^{t+1} + \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k} a^{t+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k-1} a^{t-(k-1)} b^k + b^{t+1}$$

al hacer cambio de índices en la segunda sumatoria

$$= a^{t+1} + \sum_{k=1}^{t} \left[\binom{t}{k} + \binom{t}{k-1} \right] a^{t+1-k} b^k + b^{t+1} \text{ al juntar ambas sumatorias}$$

$$= a^{t+1} + \sum_{k=1}^{t} \binom{t+1}{k} a^{t+1-k} b^k + b^{t+1} \text{ al usar propiedad c)}$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} a^{t+1-k} b^k \text{ incluyendo los dos términos de los extemos}$$

Luego (*) vale para $n = t+1$. Por Principio de inducción (*) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

Ejercicio 6.10. *Pruebe que a)* $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, *b)* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Nota. En el desarrollo del Binomio de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ vemos que hay $n+1$ términos. De esa forma la forma del t-ésimo término T_t se obtiene para $k = t-1$, es decir $T_t = \binom{n}{t-1} a^{n-(t-1)} b^{t-1}$

Ejercicio 6.11. *Encuentre el sexto término en el desarrollo de* $(3x - 4y^2)^8$.

Ejercicio 6.12. *Encuentre el término de grado 14 en* x *en el desarrollo de* $(x^3 - 3x)^{10}$.

Ejercicio 6.13. *Encuentre el término central en el desarrollo de* $(x - 3y^{\frac{1}{4}})^8$.

7. Funciones Trigonometricas

Consideraremos las funciones trigonométricas con dominios los números reales. Para ello usaremos que cada número real t está en correspondencia uno a uno con un ángulo que mide t radianes. Para visualizar esta correspondencia usaremos una circunferencia centrada en (0,0) y de radio 1. Se la llama *circunferencia unitaria* y su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

Sea θ ángulo que mide t radianes, es decir θ subtiende un arco de longitud t unidades en la circunferencia unitaria. Si $t < 0$, se mide en el sentido de las manecillas del reloj y si $t > 0$ en sentido contrario.

Sea P_t el punto de intersección del lado terminal del ángulo que mide t radianes con la circunferencia unitaria. Se define $P_t = (cos(t), sen(t))$ y tenemos así dos funciones

$$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to cos(t) = \text{ primera componente de } P_t,$$

$$sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to sen(t) = \text{ segunda componente de } P_t,$$

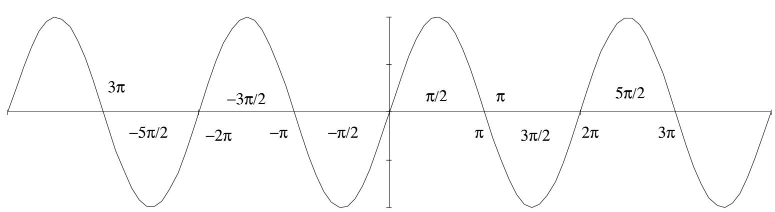


Figura 7: Sen(x)

Observación 7.1. *La longitud de una circunferencia de radio 1 es* 2π *radianes.*

Observación 7.2. *De la definición se obtiene de inmediato que*

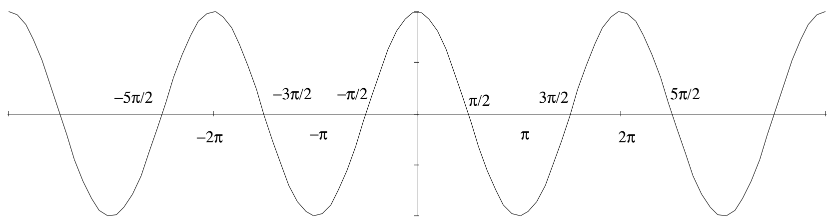


Figura 8: cos(x)

1. $0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen(t) > 0, \ \ cos(t) > 0.$

2. $\frac{\pi}{2} < t < \pi \Rightarrow sen(t) > 0, \ \ cos(t) < 0.$

3. $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow sen(t) < 0, \ \ cos(t) < 0.$

4. $\frac{3\pi}{2} < t < \pi \Rightarrow sen(t) < 0, \ \ cos(t) > 0.$

Propiedades de las funciones seno y coseno

1. $sen^2(t) + cos^2(t) = 1, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$, donde $cos^k(t)$ abrevia a $(cos(t))^k$, y lo mismo para seno.

2. $|sen(t)| \leq 1, \ |cos(t)| \leq 1 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$

3. $sen(0) = 0, \ cos(0) = 1.$

4. $sen(\frac{\pi}{2}) = 1, \ cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$

5. $sen(\pi) = 0, \ cos(\pi) = -1.$

6. $sen(\frac{3\pi}{2}) = -1, \ cos(\frac{3\pi}{2}) = 0.$

7. $sen(2\pi) = 0, \ cos(\pi) = 1.$

Demostración: Las propiedades 1 y 2 se obtienen del hecho de que $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \ P_t = (cos(t), sen(t))$ está en la circunferencia unitaria.

3.- Sabemos que $P_0 = (cos(0), sen(0))$ y por otro lado $P_0 = (1, 0)$. Luego se tiene que $sen(0) = 0,\ cos(0) = 1$.

4.- Sabemos que $P_{\frac{\pi}{2}} = (cos(\frac{\pi}{2}), sen(\frac{\pi}{2}))$ y por otro lado $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$. Luego se tiene que $sen(\frac{\pi}{2}) = 1,\ cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5.- Sabemos que $P_\pi = (cos(\pi), sen(\pi))$ y por otro lado $P_\pi = (-1, 0)$. Luego se tiene que $sen(\pi) = 0,\ cos(\pi) = -1$.

6.- Sabemos que $P_{\frac{3\pi}{2}} = (cos(\frac{3\pi}{2}), sen(\frac{3\pi}{2}))$ y por otro lado $P_{\frac{3\pi}{2}} = (0, -1)$. Luego se tiene que $sen(\frac{3\pi}{2}) = -1,\ cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

7.- Sabemos que $P_{2\pi} = (cos(2\pi), sen(2\pi))$y por otro lado $P_{2\pi} = (1, 0)$. Luego se tiene que $sen(0) = 0,\ cos(0) = 1$.

Más propiedades de las funciones seno y coseno

8.- $sen(-x) = -sen(x),\ cos(-x) = cos(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

9.- $cos(x - y) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

10.- $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

11.- $cos(\frac{\pi}{2} - y) = sen(y),\ sen(\frac{\pi}{2} - y) = cos(y),\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

12.- $sen(x + y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

13.- $sen(x - y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

De 10.- y 12.- se obtiene el siguiente resultado:

Corolario.

1. $sen(2x) = 2sen(x)cos(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

2. $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.1. *Pruebe que* $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución: Dibuje $B = P_{\frac{\pi}{4}}$ en la circunferencia unitaria. Por B trace una paralela al eje Y que corta en C al eje X. El triángulo OCB es isósceles, donde $O = (0, 0)$ el centro de la circunferencia. Luego $OC = CB$, es decir, $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4})$. Usando la identidad Pitagórica $sen^2(\frac{\pi}{4}) + cos^2(\frac{\pi}{4}) = 1$, se tiene que $2sen^2(\frac{\pi}{4}) = 1$, luego, $sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pues el ángulo que mide $\frac{\pi}{4}$ radianes está en el primer cuadrante. Por lo tanto, $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 7.2. *Pruebe que* $sen(\frac{\pi}{6}) = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $cos(\frac{\pi}{6}) = sen(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 7.3. *Pruebe que*

1. $cos(\frac{\pi}{2} - y) = sen(y)$, $sen(\frac{\pi}{2} - y) = cos(y)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

2. $cos(\pi - y) = -cos(y)$, $sen(\pi - y) = sen(y)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

3. $cos(\pi + y) = -cos(y)$, $sen(\pi + y) = -sen(y)$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.4. *Pruebe que*

1. $cos(x + 2t\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{Z}$.

2. $sen(x + 2t\pi) = sen(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{Z}$.

Demostración: 1.- Usemos inducción para probar que $cos(x + 2n\pi) = cos(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$n = 1.-$ $cos(x+2\pi) = cos(x)cos(2\pi) - sen(x)sen(2\pi) = cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Luego 1.- vale para $n = 1$.

Hip. Supongamos que $cos(x + 2k\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Tesis: Por demostrar que $cos(x + 2(k+1)\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Demostración: $cos(x+2(k+1)\pi = cos(x+2k\pi+2\pi) = cos(x+2k\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Luego 1.- vale par $n = k+1$. Luego por principio de inducción, $cos(x+2n\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Necesitamos probar ahora que $cos(x + 2t\pi) = cos(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t \in \mathbb{Z}$. Si $t = 0$, es inmediato, si $t > 0$ está probado por inducción, luego solamente falta probar que $cos(x + 2t\pi) = cos(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t < 0$. Sea $t = -k$, con $k > 0$. Luego $cos(x + 2t\pi) = cos(x - 2k\pi) = cos(-(x - 2k\pi)) = cos(-x + 2k\pi) = cos(-x)$ por la inducción. Pero $cos(-x) = cos(x)$, luego $cos(x + 2t\pi) = cos(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t < 0$.

De manera similar se prueba 2.-

Se definen las siguientes funciones trigonométricas: tangente, secante, cosecante y cotangente.

Definición 7.1. $tan : \{x \in \mathbb{R} \mid cos(x) \neq 0\} \ \rightarrow \ \mathbb{R}, \ \ x \rightarrow tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$.

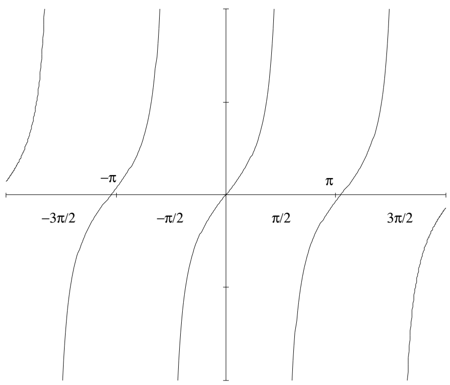


Figura 9: tan(x)

$sec : \{x \in \mathbb{R} \mid cos(x) \neq 0\} \ \rightarrow \ \mathbb{R}, \ \ x \rightarrow sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$.

$cosec : \{x \in \mathbb{R} \mid sen(x) \neq 0\} \ \rightarrow \ \mathbb{R}, \ \ x \rightarrow cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$.

$cotan : \{x \in \mathbb{R} \mid sen(x) \neq 0\} \ \rightarrow \ \mathbb{R}, \ \ x \rightarrow cotan(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$.

Ejercicio 7.5. *Pruebe que* $tan(x+y) = \frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}$

Definición 7.2. *Se llama* **identidad trigonométrica** *a una expresión que involucra funciones trigonométricas que es válida para todos los elementos del dominio de las funciones involucradas.*

Ejemplo 7.1. $1 + tan^2(x) = sec^2(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ cos(x) \neq 0.$

En efecto de la dentidad Pitagórica se tiene $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, luego dividiendo por $cos^2(x)$ se tiene la identidad pedida.

Ejemplo 7.2. *Demuestre que* $1 - cos^4(x) = (2 - sen^2(x))sen^2(x) \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

En efecto, $1 - cos^4(x) = (1 - cos^2(x))(1 + cos^2(x)) = sen^2(x)(1 + (1 - sen^2(x)) = sen^2(x)(2 - sen^2(x))$

Ejemplo 7.3. *Demuestre que* $\frac{cos^3(x)+sen^3(x)}{cos(x)+sen(x)} = 1 - sen(x)cos(x) \; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; cos(x) + sen(x) \neq 0$.

Solución: Recordemos $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
Luego, $\frac{cos^3(x)+sen^3(x)}{cos(x)+sen(x)} = \frac{(cos(x)+sen(x))[cos^2(x)-cos(x)sen(x)+sen^2(x)]}{cos(x)+sen(x)} = cos^2(x) + sen^2(x) - cos(x)sen(x) = 1 - cos(x)sen(x)$

Ejercicio 7.6. *Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:*

1. $sec^2(x) + cosec^2(x) = sec^2(x)cosec^2(x), \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; cos(x) \neq 0, sen(x) \neq 0.$
2. $\frac{sen(x)+tan(x)}{1+cos(x)} = tan(x), \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; cos(x) \neq 0, cos(x) \neq -1.$
3. $sen(x) + sen(y) = 2sen(\frac{x+y}{2})cos(\frac{x-y}{2}), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$
4. $sen(x) - sen(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})sen(\frac{x-y}{2}), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$
5. $cos(x) + cos(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})cos(\frac{x-y}{2}), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$
6. $cos(x) - cos(y) = -2sen(\frac{x+y}{2})sen(\frac{x-y}{2}), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$

Definición 7.3. *Se llama* **ecuación trigonométrica** *a una expresión que involucra funciones trigonométricas que es válida para algunos elementos del dominio de las funciones involucradas.*

Ejemplo 7.4. *Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica* $cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución: Sabemos que el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante. Además $cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ y $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ son soluciones de la ecuación $cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Además el período de coseno es 2π luego la solución general es

$$S = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo 7.5. *Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica* $4sen^2(x) - 8sen(x) + 3 = 0.$

Solución: Es una ecuación de segundo grado que se factoriza como $(2sen(x)-3)(2sen(x)-1) = 0$. Luego $sen(x) = \frac{3}{2} \lor sen(x) = \frac{1}{2}$. La primera ecuación no tiene solución pues $|sen(x)| \leq 1$. Sabemos que el seno es positivo en el primer y segundo cuadrante. Además $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, luego $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ es también solución de la ecuación $sen(x) = \frac{1}{2}$. Como el período de seno es 2π luego la solución general de la ecuación $4sen^2(x) - 8sen(x) + 3 = 0$. es

$$S = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejercicio 7.7. *Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones trigonométricas:*

1. $sen(x) = cos(x)$
2. $2sen(x)cos^2(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}cos(x)$
3. $3cos^2(x) - cos(2x) = 1$

Sea A, B, C triángulo rectángulo en B, de lados a, b, c y ángulos α, β, γ. Traslade y rote si es necesario hasta tener el triángulo dado con el vértice A coincidente con el origen $O = (0, 0)$ y lado c coincidente con eje X. En A trace una circunferencia unitaria que corta al lado b en el punto T, que será igual a P_x donde el ángulo α mide x radianes. POr P_x trace una paralela al eje Y que crta al eje X en el punto M. El triángulo A, M, P_x es semejante al triángulo A, B, C. Luego $\frac{P_xM}{AP_x} = \frac{BC}{AC}$, es decir, $\frac{P_xM}{1} = \frac{BC}{AC}$, o bien $P_xM = \frac{BC}{AC}$. Por lo tanto,

$$sen(x) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa del triángulo } A, B, C} = sen(\alpha)$$

De igual manera se prueba que

$$cos(x) = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa del triángulo } A, B, C} = cos(\alpha)$$

Teorema 7.1. *Teorema del seno: Sea A, B, C triángulo cualesquiera, de lados a, b, c y ángulos α, β, γ, entonces*

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

Demostración: Trace la altura h_c desde el vértice C hasta el lado c del triángulo, que corta al lado c en M. Se forman dos triángulos rectángulos AMC y BMC. Se tiene que $sen(\alpha) = \frac{h_c}{b}$, luego $h_c = bsen(\alpha)$. Por otro lado $sen(\beta) = \frac{h_c}{a}$, luego $h_c = asen(\beta)$. Por lo tanto $bsen(\alpha) = asen(\beta)$. Así $\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b}$. (1)

En forma similar usando la altura h_a se demuestra que $\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$. (2)

Usando (1)y (2) se tiene el Teorema del seno.

Teorema 7.2. *Teorema del coseno o teorema de Pitágoras generalizado: Sea A, B, C triángulo cualesquiera, de lados a, b, c y ángulos α, β, γ, entonces*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos(\gamma)$$

Demostración: Sea A, B, C triángulo cualesquiera de lados a, b, c y ángulos α, β, γ. Traslade y rote si es necesario hasta tener el triángulo dado con el vértice A coincidente con el origen $O = (0, 0)$ y lado c coincidente con eje X. Luego $B = (c, 0)$. Trace la altura h_c desde el vértice C hasta el lado c del triángulo, que corta al lado c en M. Luego $cos(\alpha) = \frac{AM}{b}$ y $sen(\alpha) = \frac{h_c}{b}$. Entonces $C = (bcos(\alpha), bsen(\alpha))$. Por lo tanto $a =$ distancia entre C y $B = \sqrt{(c - bcos(\alpha))^2 + (bsen(\alpha))^2}$. Luego $a^2 = (c - bcos(\alpha))^2 + (bsen(\alpha))^2 = c^2 - 2bccos(\alpha) + b^2cos^2(\alpha) + b^2sen^2(\alpha) = c^2 + b^2 - 2bccos(\alpha)$. Luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos(\alpha)$$

Ahora si se traslada y rota si es necesario hasta tener el triángulo dado con el vértice B coincidente con el origen $O = (0, 0)$ y lado a coincidente con eje X. Luego $C = (a, 0)$. Se usa que $b =$ distancia entre A y C y se demuestra que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos(\beta)$$

Finalmente si se traslada y rota si es necesario hasta tener el triángulo dado con el vértice C coincidente con el origen $O = (0, 0)$ y lado b coincidente con eje X. Luego $A = (b, 0)$. Se usa que $c =$ distancia entre B y A y se demuestra que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos(\gamma)$$

Observación 7.3. *Hay dos formas de medir un ángulo: radianes y grados y su relación es:*

$$1^o = \frac{\pi}{180} \;\; radianes$$

$$1 \; radián \; = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o$$

Así por ejemplo si un ángulo mide $\frac{\pi}{4}$ radianes mide también 45^o o si un ángulo mide $\frac{\pi}{6}$ radianes mide también 30^o o si un ángulo mide 15^o mide también $\frac{\pi}{12}$ radianes.

Ejemplo 7.6. *Dados $\beta = 30^o, b = 6, \gamma = 15^o$ construya el triángulo, si es posible, es decir determine los datos faltantes del triángulo.*

Solución: Se tiene de inmediato que $\alpha = 180^o - 30^o - 15^o = 135^o$.

Usando el teorema del seno tenemos: $\frac{sen(30^o)}{6} = \frac{sen(15^o)}{c}$. De donde $c = 6\frac{sen(15^o)}{sen(30^o)}$.

Pero $sen(30^o) = \frac{1}{2}$ y $sen(15^o) = sen(45^o - 30^o) = sen(45^o)cos(30^o) - cos(45^o)sen(30^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Luego, $c = 6\frac{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = 6\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Finalmente, $\frac{sen(30^o)}{6} = \frac{sen(135^o)}{a}$. Luego $a = 6\frac{sen(135^o)}{sen(30^o)}$. Pero $sen(135^o) = sen(90^o + 45^2) = cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego $a = 6\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$.

Ejemplo 7.7. *Dados $\gamma = 60^o, b = 0, c = 5$ construya el triángulo, si es posible, es decir determine los datos faltantes del triángulo.*

Solución: Usando el teorema del seno tenemos: $\frac{sen(\beta)}{9} = \frac{sen(60^o)}{5}$. Luego, $sen(\beta) = 9\frac{sen(60^o)}{5} = \frac{9}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{10}\sqrt{3} = 0,9\sqrt{3} \sim 0,9 \cdot 1,71 = 1,539$. Pero sabemos que $|sen(\beta)| \leq 1 \;\; \forall \beta$. Luego $sen(\beta) = 1,539$ es imposible y por lo tanto este triángulo no se puede construir.

Ejercicio 7.8. *Construya, si es posible, el triángulo dado.*

1. $\alpha = 60^o,\ \beta = 15^o,\ c = 30.$

2. $\alpha = 75^o,\ \gamma = 45^o,\ b = 8.$

3. $\gamma = 40^o,\ b = 9,\ c = 4.$

8. Polinomios

Definición 8.1. *Una expresión de la forma* $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, *donde* n *es un entero no negativo y* $a_0, a_1, ..., a_n$ *son elementos en* $\mathbb{R}$, *la llamaremos* ***un polinomio con coeficientes en*** $\mathbb{R}$, *en la indeterminada* x.

Denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ al conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y utilizaremos los símbolos $f(x), g(x), p(x), q(x), P(x), Q(X)$, ...,etc., para denotar los elementos de $\mathbb{R}[x]$.

Definición 8.2. *Sean* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *elementos en* $\mathbb{R}[x]$. *Diremos que* $p(x) = q(x)$, *si y sólo si* $n = m$ *y* $a_i = b_i$ *para todo* $i \geq 0$.

En el conjunto $\mathbb{R}[x]$ *se definen las siguientes operaciones que originan dos nuevos polinomios:*

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots b_m x^m \text{ si } n \leq m.$$

$$(pq)(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}, \text{ donde } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Comentario. Notar que algebraicamente se tiene que $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ y que $(pq)(x) = p(x)q(x)$.

El polinomios cero o polinomio nulo es aquel cuyos coeficientes son, todos ellos, cero.

Definición 8.3. *Si* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *es un polinomio en* $\mathbb{R}[x]$ *y* $a_n \neq 0$. *Entonces* a_n *se llama coeficiente supremo o principal de* $p(x)$ *y se llama* **el grado de** $p(x)$ **al número** n. *En otras palabras, grado de* $p(x) = n \quad \Leftrightarrow \quad n$ *es el mayor entero no negativo tal que* $a_n \neq 0$. *Denotaremos* $n = gr(p)$ *o* $n = gr(p(x))$. *Si el coeficiente supremo es* 1 *se dice que el polinomio es mónico. No definiremos el grado del polinomio cero.*

Podemos observar que para un polinomio $f(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, se tiene la equivalencia: $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow gr(f(x)) \geq 0$.

Lema 8.1. *Si* $f(x)$, $g(x)$ *son elementos distintos de cero en* $\mathbb{R}[x]$, *entonces* *i)* $gr(f+g) \leq max\{gr(f), gr(g)\}$

ii) $gr(f(x)g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x))$.

Demostración Parte i) de ejercicio. Probemos parte ii) Sean $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ en $\mathbb{R}[x]$ con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. De la definición de producto obtenemos que $f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$ donde $c_{n+m} = a_nb_m \neq 0$. Por lo tanto $gr(f(x)g(x)) = n + m = gr(f(x)) + gr(g(x))$.

Teorema 8.1. *(***Algoritmo de Euclides o Algoritmo de la División)** *Dados dos polinomios $h(x)$ y $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ con $p(x) \neq 0$, entonces existen únicos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tales que $h(x) = p(x)q(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ o $gr(r) < gr(h)$. El polinomio $r(x)$ se llama* **resto** *y $q(x)$* **cuociente** *de la división de $h(x)$ por $p(x)$.*

Ejercicio 8.1. *Encuentre el cuociente y el resto de dividir: a) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $g(x) = x^2 + 2$. b) $f(x) = x^3 - ix^2 + 6i$ por $x^2 + 2$.*

Nota: Si el divisor $g(x)$ es de la forma $x - c$ (de grado uno) la división se hace con un método conocido como **Método de Ruffini:** Se escriben los coeficientes de $f(x)$ en orden decreciente llenando con 0 si no aparece x^i. Por ejemplo divida $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3$ por $x + 2$.

Sol:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\
-2 & & -2 & -2 & 8 & -16 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 8 & -13 = \text{ resto}
\end{array}
$$

Luego $r(x) = -13$ y $q(x) = 8 - 4x + x^2 + x^3$.

Definición 8.4. *Sea $f(x)$ un polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y α un número tal que $f(\alpha) = 0$, entonces se dice que α es una raíz de $f(x)$.*

Definición 8.5. *Sean $f(x)$, $g(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ con $f(x)g(x) \neq 0$. Diremos que $g(x)$* ***divide a o es un divisor de*** *$f(x)$ (se denota $g(x) \mid f(x)$), si existe un polinomio $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f(x) = g(x)h(x)$.*

Proposición 8.1. *Sea $f(x)$ un polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces α es una raíz de $f(x)$ si y sólo si existe un polinomio $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $f(x) = (x-\alpha)q(x)$, es decir, $f(x) \,|(x - \alpha\ )$*

Demostración: Por el algoritmo de Euclides, sabemos que existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ o $gr(r) < gr(x-\alpha) = 1$. Así $r(x) = 0$ o $gr(r) = 0$, lo cual implica que $r(x) = a_0 \in \mathbb{R}$. Dado que α es una raíz de $f(x)$, obtenemos que $0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$. Por lo tanto $a_0 = 0$ y $f(x) = (x-\alpha)q(x)$. Recíprocamente, tenemos que $f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0$. Por lo tanto α es raíz de $f(x)$.

Ejercicio 8.2. *Sabiendo que -1 y $\frac{1}{3}$ son raíces de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ encuentre las otras dos raíces.*

Definición: Diremos que una raíz $\alpha \in \mathbb{R}$ de un polinomio no constante $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, tiene mutiplicidad $m \geq 1$, si existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $f(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$.

Ejemplo 8.1. *Determine el valor de k para que el polinomio $p(x) = x^3 - kx^2 + 48x - 36 \in \mathbb{R}[x]$, tenga una raíz real de multiplicidad 2.*

Solución: Si a es raíz de multiplicidad 2, entonces $p(x) = (x-a)^2 q(x)$ con $q(a) \neq 0$. Al dividir $p(x)$ por $(x-a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ da un cuociente $q(x) = x - (k+2a)$ y un resto $r(x) = (2ak + 3a^2 + 48)x + (ka^2 + 2a^3 - 36)$. Luego $r(x) = 0$ si y solo si $2ak + 3a^2 + 48 = 0$ y $ka^2 + 2a^3 - 36 = 0$. Resolviendo el sistema queda $k = \frac{-96a-108}{a^2}$. Notemos que $a \neq 0$, pues si fuera cero, entonces $0 = p(0) = -36$. Lo que es una contradicción. Además $q(a) = a - (\frac{12}{a} + 2a) = -a - \frac{12}{a} = -\frac{a^2+12}{a} \neq 0$, dado que $a^2 + 12 > 0$.

9. Límites y Continuidad

9.1. Definición y propiedades básicas

Noción intuitiva de límite

- Sean: $f(x) : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. La idea es que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) \text{ se aproxima a } L$$
$$\text{cuando } x \text{ se aproxima a } a$$

- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es **punto de acumulación** de X si a cualquier distancia de a hay al menos un punto $p \in X$, $p \neq a$, más cercano.

  Ejemplo: 1 es punto de acumulación de $[1, 4]$

  1 es punto de acumulación de $]1, 4[$

  1 NO es punto de acumulación de $]3, 4[$

  1 NO es punto de acumulación de $\mathbb{Z}$

Definición 9.1. *Sea $f : A \to B$ una función real de variable real, sea $L \in \mathbb{R}$ un número, y sea a un punto de acumulación de A. Se dice que "L es el límite de f cuando x tiende a a", denotado $\lim_{x \to a} f(x) = L$, exactamente cuando se cumple:*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in dom(f) \quad \big[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\big]$$

En palabras, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ exactamente cuando *para todo ϵ positivo existirá un δ positivo tal que cada x que cumpla* $0 < |x - a| < \delta$ *cumplirá* $|f(x) - L| < \epsilon$.

La idea es que el *LÍMITE* es, si existe, el número al que los resultados de la función se aproximan cuando la función se evalúa en valores de x que aproximan, pero son distintos, de a.

Ejemplo 9.1. *Verifiquemos que* $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

Sea $\epsilon > 0$ *arbitrario (es cualquiera, mientras sea positivo); busco un* δ *(que dependerá de* ϵ*) que cumpla* $\forall x \in dom(f) \quad \big[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon\big]$ *con* $f = \sqrt{x}$*,* $a = 4$ *y* $L = 2$*. Pero* $|f(x)-L| < \epsilon$ *quedaría en este caso:* $|\sqrt{x}-2| < \epsilon$*. Multiplicando a ambos lados por* $|\sqrt{x}+2|$*, se obtiene* $|x-4| < |\sqrt{x}+2|\epsilon$*, ya que* $(x-4) = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$*. Buscamos* δ *que dependa de* ϵ*, de la función y de 4, que cuando* $0 < |x-4| < \delta$ *haga verdad que* $|\sqrt{x}-2| < \epsilon$*, pero* δ *NO debe depender de* x*, así que artificialmente, pero con sentido, requerimos* $|x-4| < 1$ *de modo que* $-1 < x-4 < 1$*, y por tanto* $3 < x < 5$*. Pero entonces con esa restricción tenemos* $\sqrt{3} < \sqrt{x}$*, de donde* $\sqrt{3}+2 < \sqrt{x}+2 = |\sqrt{x}+2|$*. Luego,* $|x-2| < 1 \Rightarrow (\sqrt{3}+2)\epsilon < |\sqrt{x}+1|\epsilon$*, así que pedimos que* δ *sea el menor valor entre 1 y* $(\sqrt{3}+2)\epsilon$ *para lograr que todo se cumpla para los mismos valores de* x*:*

$$\forall x \in dom(f) \quad \Big[0 < |x-4| < \delta \Rightarrow \Big(|x-4| < (\sqrt{3}+2)\epsilon \wedge |x-4| < 1\Big)\Big]$$

$$\forall x \in dom(f) \quad \Big[0 < |x-4| < \delta \Rightarrow \Big(|x-4| < (\sqrt{3}+2)\epsilon \wedge (\sqrt{3}+2)\epsilon < |\sqrt{x}+1|\epsilon\Big)\Big]$$

$$\forall x \in dom(f) \quad \Big[0 < |x-4| < \delta \Rightarrow \Big(|x-4| < |\sqrt{x}+2|\epsilon\Big)\Big]$$

$$\forall x \in dom(f) \quad \big[0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \epsilon\big]$$

Hemos probado que dado $\epsilon > 0$ *existirá* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in dom(f)$ *se cumple* $\big[0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \epsilon\big]$*, es decir, probamos que*

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$$

Ejemplo 9.2. *Lo que sigue NO ES UN MÉTODO PARA CALCULAR LÍMITES, es sólo para ilustrar:*

1. *Para "aproximar"* $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$*, calculamos* $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ *para valores de* x *cercanos a* 1*.*

2.

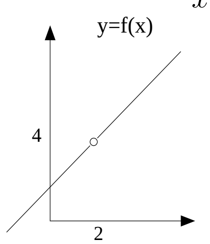
$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

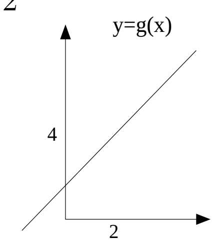
$x > 1$	$f(x)$
01,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

3. *La idea será que* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$

4. *Note que no importa si existe o no, ni cuanto vale,* $f(1)$.

5. *Sean* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *y* $g(x) = x+2$. *Sabemos que* $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ *y que* $dom(g) = \mathbb{R}$.





6. *Note que* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \neq 2$.

7. *Nada impide a* $g(x)$ *acercarse a* $g(2)$ *cuando* x *se acerca a* 2. *Pero aunque* $f(2)$ *no existe,* 2 *es punto de acumulación de* $dom(f)$, *es decir,* $f(x)$ *existe para valores cercanos pero distintos de* 2.

8. *Como* $f(x) = g(x)$ *salvo en* 2, ***cuando*** x *se* ***aproxima*** *a* 2 *es claro que* $f(x)$ *se* ***aproxima*** *a* $g(2)$, *es decir, a* 4.

9. *Es decir,*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \quad \textit{y de paso} \quad \lim_{x \to 2} x+2 = 4$$

Si las funciones se complican, es mejor utilizar límites ya calculados para calcular los límites de funciones que se construyen respecto de ellas:

Proposición 9.1. *Sean f y g dos funciones tales que $a \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de la intersección de sus dominios, y sea $c \in \mathbb{R}$ un número fijo. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces:*

1. $\lim_{x\to a} x = a$
2. *Si $c \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces $\lim_{x\to a} c = c$*
3. $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big) \pm \big(\lim_{x\to a} g(x)\big)$ *(límite de suma o resta es suma o resta de los límites)*
4. $\lim_{x\to a} \big(cf(x)\big) = c\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)$ *(constantes salen fuera del límite)*
5. $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)\big(\lim_{x\to a} g(x)\big)$ *(límite de un producto es producto de los límites)*
6. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *si* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ *(límite de un cociente es cociente de los límites, cuando no divido por cero)*
7. *Si $f \neq 0$ en un intervalo en torno a a y $n \in \mathbb{Z}$, entonces*

   $$\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^n = \big(\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^n$$

   (límite de potencia es potencia del límite)
8. *Si $f > 0$ en un intervalo en torno a a y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

   $$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

   (límite de una raíz es raíz del límite)
9. *Si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo x en un intervalo en torno a a (es decir, f es acotada en los alrededores de a), y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces*

   $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

   (Nula por Acotada)

10. *(Teorema del Sandwich) Si en un intervalo abierto I que contiene a $x = a$ se cumple $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$, salvo tal vez en el mismo a, y se tiene $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$*

11. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to b} g(x) = L$ y, o bien en un intervalo abierto I que contenga a a se cumple $\forall x \in I(x \neq a \to f(x) \neq b)$, o bien $g(b) = L$, entonces*

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = L$$

(límite de una composición de funciones)

12. *Límite útil:* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$

Ejemplo 9.3. 1. $\lim_{x\to 3} 5x^2 - 2x + 4 = 5\big(\lim_{x\to 3} x\big)^2 - 2\big(\lim_{x\to 3} x\big) + \lim_{x\to 3} 4 = 5(3)^2 - 2(3) + 4 = 43$

2. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \dfrac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2x^2 - 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3x}\big(\text{ denominador no da cero}\big)$

$$= \frac{\big(\lim_{x\to -2} x\big)^3 + 2\lim_{x\to -2} - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2}} = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}\Big(\text{ cociente de limites no aplica, queda } 0/0 \therefore \text{ Racionalizamos }\Big) =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}\Big(\text{ no importa en 1}\Big)$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

4.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \quad \Big(\text{ cociente de limites no aplica, queda } 0/0 \therefore \text{ Racionalizamos }\Big) =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \sqrt{x} + 2 = 4$$

5. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(x) = 0$ *ya que* $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ *para todo* x*, y entonces* $-x \leq x\operatorname{sen}(x) \leq x$ *y como* $\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} -x = 0$*, se obtiene, por Teorema del Sandwich, que* $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(x) = 0$.

6. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+3}\cos\left(\dfrac{x^5-x^3+8\sqrt{x}+456}{32x^6+8x^4+5x^2+1}\right)\right] = 0$*, ya que aplicando Nula por Acotada queda* $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+3} = \dfrac{0}{6} = 0$ *y* $|\cos(\alpha)| \leq 1$ *para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$

7. $\lim_{x\to 2}\sqrt{3x+5} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3x+5)} = \sqrt{3\cdot 2+5} = \sqrt{11}$ *por composición de funciones. Verifique los detalles.*

Ejercicio 9.1. *1. Calcule* $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-x+12}{x+3}$

2. Calcule $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

3. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x-5)^2-25}{x}$

4. Calcule $\lim_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

5. Grafique la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y luego calcule el límite $\lim_{x\to 1} g(x)$

9.2. Continuidad

Una función es *continua* en $x = a$ si $a \in\ dom(f)$ y $\lim_{x\to a} = f(a)$, o bien si a no es punto de acumulación de $dom(f)$ pero pertenece a él.

Una función es continua en un conjunto si es continua en cada uno de los elementos del conjunto.

Lema 9.1. *1. Las siguientes funciones son continuas en todo su dominio: constantes, afines, polinomios, raíces, fracciones racionales (cociente de polinomios), seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.*

2. La suma, producto, cociente (sin dividir por cero) y potencia de funciones continuas resulta en función continua.

3. La composicin de funciones continuas es continua.

Ejercicio 9.2. *La función* $f(x) = \dfrac{sen(x^2+1)}{\sqrt{x+4}}$ *es continua en su dominio, ya que es cociente de funciones continuas, que a su vez lo son por ser composición de funciones continuas.*

Note que como es fácil calcular límite de una función en los puntos en que es continua (basta evaluar la función), el cálculo de límites que interesa es cuando no puedo asegurar de modo simple la continuidad de la función en el punto, por ejemplo, cuando no puedo aplicar el lema anterior.

No pierda de vista que el límite puede existir aunque la función no sea continua en el punto. Al revés es cierto: el límite debe existir donde sea continua la función.

9.3. Límites laterales

Un caso habitual donde la continuidad de la función no se obtiene mediante el lema previo es para funciones definidas por casos, es decir, la regla de asignación cambia de formato en distintos subconjuntos del dominio. Si tales subconjuntos son intervalos contiguos, el concepto de límites laterales es particularmente útil.

Definición 9.2 (Límites Laterales)**.** *Sean* $f : A \to B$ *una función,* a *punto de acumulación de* A*, y* $L \in \mathbb{R}$*. Definimos:*

- L *es el límite por* ***derecha*** *de* f *cuando* x *tiende a* a *y se denota* $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$*, cuando se cumple*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in dom(f) : \big(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

  (es decir, x *tiende a* a *pero con* $x > a$*)*

- *L es el límite por **izquierda** de f cuando x tiende a a y se denota $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$, cuando se cumple*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in dom(f) : \big(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\big)$$

(es decir, x tiende a a pero con $x < a$)

Proposición 9.2. *Sean $f : A \to B$ una función, a punto de acumulación de A, y $L \in \mathbb{R}$. Entonces*

$\lim_{x \to a} f(x)$ *existe y es L $\Longleftrightarrow$ los límites laterales existen y ambos son L*

La propiedad se abrevia por $\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Ejemplo 9.4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por* $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x \leq 1 \\ 7 - x & si\ x > 1 \end{cases}$

Entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \underset{(f\ es\ 2x+1\ a\ izquierda\ de\ 1)}{\lim_{x \to 1^-} 2x + 1} = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \underset{(f\ es\ 7-x\ a\ derecha\ de\ 1)}{\lim_{x \to 1^+} 7 - x} = 6$$

Como los límites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe y por lo tanto f no es continua en 1. Ver Figura 10

Ejercicio 9.3. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por* $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ x \leq 3 \\ 7 - x & si\ x > 3 \end{cases}$

Determine si existe $\lim_{x \to 3} g(x)$ y si g es o no continua en 3.

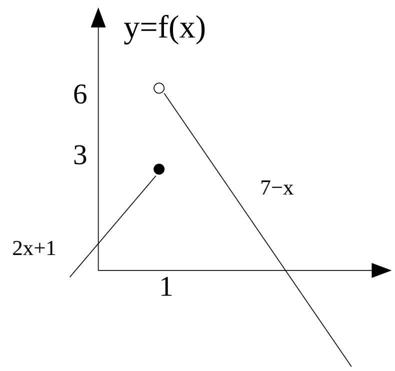


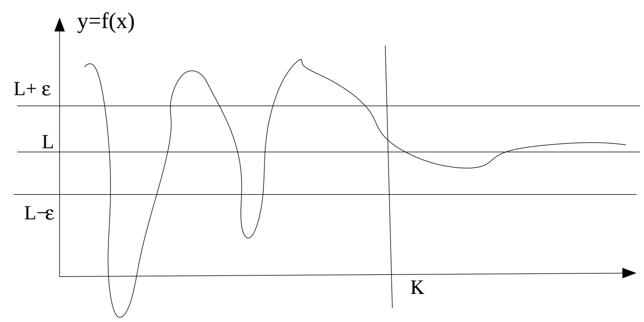
Figura 10: Gráfica figura 9.4

9.4. Límites y el infinito

Definición 9.3. *Sea f función con $[p, \infty) \subseteq dom(f)$ para algún*[2] $p \in \mathbb{R}$*. Se define el* límite de f cuando x tiende a ∞*, denotado* $\lim\limits_{x \to \infty}$ *por:*

$$L = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists K > 0\, \forall x \in dom(f) \left(K < x \to |f(x) - L| < \epsilon\right)$$

La idea es que f se acerca a L cuando x crece ilimitadamente.



Las reglas de límite de suma, producto y las demás siguen siendo válidas:

Ejemplo 9.5. *1.* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^p} = 0,\ p > 0$

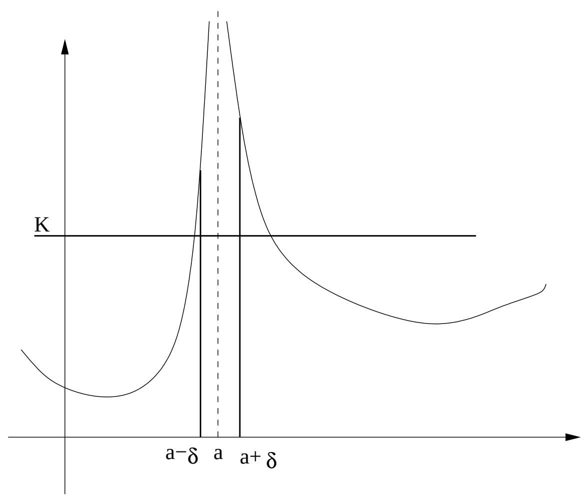
[2]Es decir, de un punto en adelante el dominio se extiende sin interrupciones y sin verse acotado

4. $$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^3+2x+1}{7x^3-4x^2+5}}_{\textit{divido numerador y denominador por } x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{7-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}} = \frac{4}{7}$$

Para límites cuando la variable tiende a $-\infty$ todo es análogo; determine de qué modo cambia la respectiva definición (es un tema de desigualdades).

Definición 9.4. *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación de A. Se define* el límite de f cuando x tiende a a es ∞, *denotado $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ por:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in dom(f)\, \big(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow K < f(x)\big)$$



Gráfica de ejemplo.

La definición puede modificarse para trabajar con límites laterales y con límites cuando la variable tiende a ∞ o $-\infty$

Ejemplo 9.6. *1.* $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \infty$*: Sea $K > 0$. Entonces analizando $K < \frac{1}{(x-2)^2}$ obtenemos $0 < (x-2)^2 < \frac{1}{K}$ (que sea mayor que cero es debido a que $x \neq 2$ ya que no dividimnos por cero). Luego sea $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$: cuando $0 < |x-2| < \delta$, tendremos $0 < |x-2| < \frac{1}{\sqrt{K}}$ y por lo tanto $x \neq 2$ y $K < \frac{1}{(x-2)^2}$. Hemos probado entonces que $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \infty$.*

2. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$

3. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

Proposición 9.3. *Si $f(x) < g(x)$ en algún intervalo abierto que contiene a a, y $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$*

La propiedad puede adaptarse al caso en que f tiende a $-\infty$, y al caso en que en vez de hacia a, x tiende a $\pm\infty$, o a una combinación de esos casos.

Proposición 9.4. *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y g es acotada y positiva en un entorno de a (en particular si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe y es positivo), entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$*

La propiedad puede adaptarse al caso en que f tiende a $-\infty$, al caso en que g es negativo, y al caso en que en vez de hacia a, x tiende a $\pm\infty$, o a una combinación de esos casos.

Ejercicio 9.4. *Justifique los siguientes límites:*

1. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \infty$
2. $\lim_{x\to 2^-} 4x + \dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8} = 8$
3. $\lim_{x\to \infty} x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = \infty$
4. $\lim_{x\to -\infty} x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = -\infty$
5. $\lim_{x\to \infty} x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = \infty$
6. $\lim_{x\to -\infty} x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = \infty$
7. $\lim_{x\to \infty} -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = -\infty$
8. $\lim_{x\to -\infty} -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = \infty$
9. $\lim_{x\to \infty} -3x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = -\infty$
10. $\lim_{x\to -\infty} -3x^4 - 7x^3 + x^2 + 4x + 5 = -\infty$

9.5. Continuidad en intervalos cerrados

Teorema 9.1. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces:*

1. *Existen p y q en $[a, b]$ tales que $\forall x \in [a, b] \big(f(q) \leq f(x) \leq f(p)\big)$, es decir, f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$. En particular la función f es acotada en $[a, b]$*

2. *Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

3. *Si $f(z) > 0$ para un $z \in [a, b]$, existe un intervalo abierto $I \subset [a, b]$ con que contiene a z tal que f es positiva en cada punto de I.*

4. *(Teorema del Valor Intermedio, TVI) Para todos x e y en $[a, b]$, si $f(x) < f(y)$ entonces para todo k tal que $f(x) < k < f(y)$ existe $z \in [a, b]$ tal que $k = f(z)$ y z está estrictamente entre x e y. Ello quiere decir que la gráfica de f sobre $[a, b]$ no tiene cortes*

Ejercicio 9.5. *La función $f(x) = x^3 - x^2 + 4$ corta al eje X en al menos un punto entre -2 y 2, ya que es continua en su dominio, en particular es continua en $[-2, 2]$ y $f(-2) = -8$ y $f(2) = 8$, asi que por los teoremas anteriores debe haber un punto c entre -2 y 2 donde $f(c) = 0$.*