

3 Conjuntos finitos e infinitos, Números Naturales.

1. Demuestre que no puede existir una biyección entre un conjunto finito y un subconjunto propio de este.
2. Considere la función $f : X \rightarrow Y$. Pruebe que
 - (a) Si Y es finito y f inyectiva entonces X es finito.
 - (b) Si X es finito y f sobreyectiva entonces Y es finito.
3. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función inyectiva. Pruebe que si Y es numerable entonces X también lo es.
4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Pruebe que si X es numerable entonces Y también lo es.
5. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, pruebe que n es múltiplo de m o que existen $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $n = mq + r$ con $r < m$.
6. Dado $n \in \mathbb{N}$ pruebe que no existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.
7. Sea $P(X)$ el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X . Pruebe que si X es finito entonces $\text{card}P(X) = 2^{\text{card}X}$.
8. Pruebe que todo conjunto finito X de números naturales posee un elemento máximo.
9. Indique un ejemplo de una sucesión decreciente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos infinitos cuya intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ sea vacía.
10. Pruebe que si $A \subseteq B$ y B numerable, entonces A es numerable.
11. ¿Es numerable el conjunto de los números primos? ¿Es infinito? Justifique su respuesta.
12. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable. ¿Son los números irracionales un conjunto numerable? Justifique.
13. Pruebe que si $A \subseteq B$ y A es infinito, entonces B es infinito.
14. Mediante inducción matemática, pruebe cada una de las siguientes proposiciones:
 - (a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 - (b) $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$
 - (c) $5n^3 + 7n$ es divisible por 3
 - (d) $3^n \geq 2n + 1$
 - (e) $n^2 > 2n + 1$, para $n \geq 3$