Algebra y Geometría II

Guía n°2 Primer Semestre 2011

- Una recta L de $\mathbb{R}^2$ contiene los dos puntos $p = (-3, 1)$ y $q = (1, 1)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L :
(a) $(0, 0)$; (b) $(0, 1)$; (c) $(1, 2)$; (d) $(2, 1)$; (e) $(-2, 1)$.
- Resolver el ejercicio anterior si $p = (2, -1)$ y $q = (-4, 2)$.
- Una recta L de $\mathbb{R}^3$ contiene al punto $p = (-3, 1, 1)$ y es paralela al vector $(1, -2, 3)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L :
(a) $(0, 0, 0)$; (b) $(2, -1, 4)$; (c) $(-2, -1, 4)$; (d) $(-4, 3, -2)$; (e) $(2, -9, 16)$.
- Una recta L de $\mathbb{R}^3$ contiene los dos puntos $p = (-3, 1, 1)$ y $q = (1, 2, 7)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en L :
(a) $(-7, 0, 5)$; (b) $(-7, 0, -5)$; (c) $(-11, 1, 11)$; (d) $(-11, -1, 11)$; (e) $(-1, \frac{3}{2}, 4)$;
(f) $(\frac{-5}{3}, \frac{4}{3}, 3)$; (g) $(-1, \frac{3}{2}, -4)$.
- Sea $M = \{p + \alpha u + \beta v\}$, donde $p = (1, 2, -3)$, $u = (3, 2, 1)$ y $v = (1, 0, 4)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M .
(a) $(1, 2, 0)$; (b) $(1, 2, 1)$; (c) $(6, 4, 6)$; (d) $(6, 6, 6)$; (e) $(6, 6, -5)$.
- Los tres puntos $p = (1, 1, -1)$, $q = (3, 3, 2)$ y $r = (3, -1, -2)$ determinan un plano M . Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M .
(a) $(2, 2, \frac{1}{2})$; (b) $(4, 0, -\frac{1}{2})$; (c) $(-3, 1, -3)$; (d) $(3, 1, 3)$; (e) $(0, 0, 0)$.
- Determinar en cada caso la ecuación cartesiana del plano:
  - El plano que pasa por $(1, 2, 1)$ y está generado por los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 4)$.
  - El plano que pasa por $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 4)$.
  - El plano que pasa por $(2, 3, 1)$ y es paralelo al plano que pasa por el origen y está generado por $(2, 0, -2)$ y $(1, 1, 1)$.
- En cada caso, determinar si los tres puntos p , q y r están en una recta:
  - $p = (2, 1, 1)$, $q = (4, 1, -1)$ y $r = (3, -1, 1)$;

b) $p = (2, 2, 3)$, $q = (-2, 3, 1)$ y $r = (-6, 4, 1)$;

c) $p = (2, 1, 1)$, $q = (-2, 3, 1)$ y $r = (5, -1, 1)$.

9. La ecuación cartesiana de un plano M es $3x - 5y + z = 9$.

a) Determinar cuáles de los siguientes puntos están en M : $(0, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ y $(3, 1, -5)$

b) Hallar los vectores p , u y v tales que $M = \{p + \alpha u + \beta v\}$.

10. Una recta pasa por el punto $p = (1, 1, 1)$ y es paralela al vector $u = (1, 2, 3)$. Otra recta pasa por $q = (2, 1, 0)$ es paralela al vector $v = (3, 8, 13)$. Demostrar que las dos rectas se cortan y determinar su punto de intersección.

11. a) Demostrar que dos rectas $L(p, u)$ y $L(q, v)$ de $\mathbb{R}^3$ se cortan si y sólo si existen α y β reales tal que $p - q = \alpha u + \beta v$.

b) Determinar si se cortan o no las dos rectas siguientes de $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{(1, 1, -1) + \alpha(-2, 1, 3)\}, \quad L' = \{(3, -4, 1) + \alpha(-1, 5, 2)\}.$$

12. Dados el plano $M = \{(2, 3, 1) + \alpha(1, 2, 3) + \beta(3, 2, 1)\}$ y otro plano M' cuya ecuación cartesiana es $x - 2y + z = 0$.

a) Determinar si M y M' son paralelos.

b) Hallar la intersección $M' \cap M''$ si M'' tiene la ecuación cartesiana $x + 2y + z = 0$.

13. Sea $x(\alpha) = p + \alpha v$ un punto arbitrario en la recta $L(p, v)$, siendo $p = (1, 2, 3)$ y $v = (1, -2, 2)$ y sea $q = (3, 3, 1)$.

a) Calcular $\|q - x(\alpha)\|^2$;

b) Demostrar que hay exactamente un punto $x(\alpha_0)$ para el que la distancia $\|q - x(\alpha)\|^2$ es mínima y calcularla.

c) Demostrar que $q - x(\alpha_0)$ es ortogonal a v .

14. Generalize el problema anterior para un punto q que no pertenece a la recta $L(p, v)$.

15. Dadas dos rectas $L(p, u)$ y $L(q, v)$ de $\mathbb{R}^3$ que no son paralelas. Demostrar que la intersección es vacía o consta de un sólo punto.

16. Dos puntos p y q están en un plano M . Demostrar que todo punto de la recta que pasa por p y q pertenece también a M .

17. Dados una recta L y un punto p no situado en L . Demostrar que existe un plano y sólo uno que pasa por p y contiene todos los puntos de L .