# Trigonometría

1. Determine los siguientes valores:

   *a)* $\cos(15\pi)$
   *b)* $\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
   *c)* $\operatorname{sen}\left(\frac{-14\pi}{3}\right)$
   *d)* $\cos\left(\frac{47\pi}{3}\right)$
   *e)* $\cos\left(\frac{-56\pi}{3}\right)$
   *f)* $\cos\left(\frac{-126\pi}{3}\right)$

2. Calcule $\operatorname{sen}(t)$ usando la información dada:

   *a)* $0 < t < \pi$ y $\cos(t) = \frac{3}{5}$
   *b)* $\pi < t < 2\pi$ y $\cos(t) = -\frac{3}{5}$
   *c)* $5\pi < t < 6\pi$ y $\cos(t) = -\frac{5}{13}$

3. Calcule $\cos(t)$ usando la información dada:

   *a)* $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ y $\operatorname{sen}(t) = \frac{3}{5}$
   *b)* $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ y $\operatorname{sen}(t) = -\frac{3}{5}$
   *c)* $\frac{7\pi}{2} < t < 4\pi$ y $\operatorname{sen}(t) = -\frac{5}{13}$
   *d)* $\frac{17\pi}{2} < t < 9\pi$ y $\operatorname{sen}(t) = \frac{12}{17}$

4. Encuentre $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ y $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dado que:

   *a)* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ y $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{5}{13}$
   *b)* $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ y $\cos(x) = \dfrac{3}{7}$

5. Demuestre las siguientes identidades:

   *a)* $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \cos x \operatorname{cosec} x = 1$
   *b)* $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} + \dfrac{\tan x}{\sec x + 1} = 2 \operatorname{cosec} x$
   *c)* $(\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 7$
   *d)* $\cot x = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x}{1 - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}$
   *e)* $2 \sec^2 x - \sec^4 x - 2 \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec}^4 = \dfrac{1 - \tan^8 x}{\tan^4 x}$
   *f)* $\dfrac{\cot x \cos x}{\cot x + \cos x} = \dfrac{\cot x - \cos x}{\cot x \cos x}$

6. Demuestre:

   *a)* $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$
   *b)* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen}(x)$
   *c)* $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
   *d)* $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
   *e)* $\tan(3x) = \tan(x) \cdot \dfrac{3 - \tan^2(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
   *f)* $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
   *g)* $\cos(x) = \dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

7. Demuestre las siguientes relaciones de recurrencia:

   *a)* $\forall n \in \mathbb{N} \operatorname{sen}(nx) = 2\cos(x)\operatorname{sen}((n-1)x) - \operatorname{sen}((n-2)x)$
   *b)* $\forall n \in \mathbb{N} \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n-1)x) - \cos((n-2)x)$

8. Demuestre:

   a) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
   b) $2\cos(x)\cos(y) = (\cos(x+y) + \cos(x-y))$
   c) $2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = (\cos(x-y) - \cos(x+y))$
   d) $2\operatorname{sen}(x)\cos(y) = (\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$

9. Encuentre los siguientes valores:

   a) $\operatorname{Arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   b) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$
   c) $\operatorname{Arctan}(0)$
   d) $\operatorname{Arctan}(-\sqrt{3})$
   e) $\operatorname{Arcsen}(-1)$

10. Determine los conjuntos siguientes:

    a) $\operatorname{arcsen}(0)$
    b) $\operatorname{arccos}(-1)$
    c) $\operatorname{arctan}(\sqrt{3})$
    d) $\operatorname{arctan}(-1)$
    e) $\operatorname{arcsen}(-1)$

11. Demuestre:

    a) $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctan}(1)$
    b) $\operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{5}\right) + \operatorname{Arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{27}{11}\right)$
    c) $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4}$

12. Para todo $x \in [-1, 1]$:

    a) $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsen}(x) = \dfrac{\pi}{2}$
    b) $\cos(\operatorname{Arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$
    c) $\tan(\operatorname{Arcsen}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
    d) $\tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

13. Demuestre, indicando además para qué valores de $x$ tiene sentido:

    a) $\operatorname{sen}(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
    b) $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
    c) $\operatorname{Arcsec}(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{x}\right)$
    d) $\operatorname{Arccosec}(x) = \operatorname{Arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)$

14. Evalúe las siguientes expresiones:

    a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{-2}{3}\right)\right)$
    b) $\tan\left(\operatorname{Arcsen}\left(\frac{-3}{4}\right)\right)$
    c) $\cos\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{15}{8}\right) - \operatorname{Arcsen}\left(\frac{7}{25}\right)\right)$
    d) $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{Arctan}(3)\right)$

15. Si $\cot(x) = \dfrac{p}{q}$, simplifique de manera que no quede $x$ en el resultado

$$\frac{p\cos(x) - q\operatorname{sen}(x)}{p\cos(x) + q\operatorname{sen}(x)}$$

16. Encuentre los valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfacen las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   *a)* $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   *b)* $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

   *c)* $\sec x = -\sqrt{2}$

   *d)* $\tan^2 x = \dfrac{1}{3}$

   *e)* $\tan x = \cot \dfrac{\pi}{4}$

   *f)* $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 1.$

   *g)* $\cot x + 3 \tan x = 5 \operatorname{cosec} x$

   *h)* $\tan(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \tan(\frac{\pi}{2} - x) = 1$

17. Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $4 \operatorname{sen}^2(x) = 1$

18. Resuelva la ecuación
$$2 \operatorname{sen}^2(x) + 7 \cos(x) = 5$$

19. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   *a)* $\cos 2x = \cos x - \operatorname{sen} x.$

   *b)* $\operatorname{sen} x + \cos 2x - \cos 4x = 0.$

   *c)* $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = \sqrt{2} \cos 4x.$

   *d)* $\tan 2x = \operatorname{sen} 4x.$

20. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   *a)* $2 \operatorname{Arctan}(1/2) + \operatorname{Arccos}(3/5) + \operatorname{Arcsen}(1/x) = \pi$

   *b)* $\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x-1) = \operatorname{Arctan}(2)$

   *c)* $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1-x) = 2 \operatorname{Arctan}\big(\sqrt{x - x^2}\big)$

21. Resuelva el triángulo ABC (no use calculadora) si:

   *a)* $a = 10$, $\alpha = 15°$, $\gamma = 60°$

   *b)* $\alpha = 105°$, $\gamma = 60°$, $b = 4$

   *c)* $a = 1$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c = \dfrac{1}{2}$

   *d)* $\alpha = 75°$, $\beta = 30°$, $b = \sqrt{8}$

22. Demuestre que en todo triángulo cuyos lados miden $a$, $b$ y $c$ y cuyos ángulos son $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ respectivamente, se cumple:

   *a)* $2\left(a \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) + c \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = a - b + c$

   *b)* Si $\operatorname{sen}(\gamma) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}$ entonces $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

   *c)* $\dfrac{\cos(\beta)}{\cos(\gamma)} = \dfrac{c - b\cos(\alpha)}{b - c\cos(\alpha)}$

   *d)* Si $\alpha = 30°$ y $\beta = 50°$ entonces $c^2 = b(a+b)$