

Polinomios

Usaremos $K[x]$ para el anillo de polinomios sobre el cuerpo K

1. Verifique que $p(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{x^4}{2}\right)^5 - \frac{32}{x^5}$ es un polinomio y determine su grado.
2. Para los polinomios p y q en $\mathbb{C}[x]$, calcular cociente c y resto r al dividir p entre q :
 - a) $p(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x^3 - 2$
 - b) $p(x) = ix^4 + \frac{1}{1+i}x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x - 1$
 - c) $p(x) = x^4 - 4x^2 + 6$, $q(x) = x^2 - \sqrt{2}$
3. Determine el valor de m para que $9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga resto 12 al dividirlo por $x + 2$.
4. Sea $c \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^n + c^n$ es múltiplo de $x + c$?
5. Determine un polinomio de grado 2 si se sabe que es divisible por $x + 2$ y si se obtiene el mismo resto al dividirlo por $x + 1$ que al dividirlo por $x + 3$.
6. Determine un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grado 3 que cumpla $p(0) = 2$, $p(1) = p(-i) = 0$. Muestre que es p es el único que cumple lo pedido.
7. Determine un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado a lo más 3 que cumpla $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p(-1) = 4$ y $p(2) = 1$. Muestre unicidad.
8. Determine un polinomio de coeficientes reales que sea mónico de grado 5 y tenga a 2 por raíz de multiplicidad 3 y tenga a $1 + 2i$ como raíz de multiplicidad 1. Demuestre que el polinomio obtenido es único.
9. Demuestre que no existen polinomios en $\mathbb{R}[x]$ que tengan a 1, 2 e i por únicas raíces.
10. Verifique que $(1 + 2i)$ es raíz del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$ y encuentre todas las demás raíces.
11. Determine todas las raíces del polinomio $p(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ si tanto i como $-2i$ son raíces de él.
12. Determine todos los polinomios de grado 4 en $\mathbb{R}[x]$ que tengan a $1 + i$ como raíz de multiplicidad 2.
13. Determine todas las raíces racionales de:
 - a) $3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$
 - b) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}$
14. Encuentre las raíces del polinomio $2x^3 - 21x^2 + 42x - 16$ sabiendo que sus raíces están en progresión geométrica. Descomponga el polinomio en factores irreducibles.
15. Encuentre todas las raíces de $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = 0$
16. Demuestre que si un polinomio p es irreducible mónico, entonces el MCD de p y otro polinomio es 1 o p .

17. Factorice $p(x)$ completamente en $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$.

a) $3x^2 + 2x + 1$

f) $x^6 - 8$

b) $x^4 + 7x^2 - 8$

g) $x^6 + 27$

c) $x^5 - x$

h) $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$

d) $x^4 - 1$

i) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$

e) $x^4 + 16$

18. Determine en cada caso el MCD de los polinomios y escríbalo como combinación lineal de ellos:

a) $x^4 - 1$ y $x^3 - x^2 + x - 1$ b) $x^3 - 1$ y $x^2 - 1$ c) $x^3 - 1$ y $x^2 + 1$

19. Determine un polinomio de coeficientes reales, de grado 4, que tenga a 2 como raíz de multiplicidad 2 y a $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ como raíz de multiplicidad 1, y que evaluado en 0 dé 9.

20. Demuestre que si el resto de la división de p por q , ambos polinomios reales, tiene una raíz compleja no real, entonces el grado de q es mayor o igual a tres.

21. Demuestre que $MCD(x^2 + x + 1, x + 2) = 1$ y determine explícitamente los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ tales que $a(x)(x^2 + x + 1) + b(x)(x + 2) = 1$.

Fracciones Parciales

1. Descomponga en fracciones parciales en $\mathbb{R}(x)$

a) $\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2}$

f) $\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)}$

k) $\frac{8}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}$

b) $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$

g) $\frac{1}{(x - 1)^2}$

l) $\frac{4x^2 - 7x + 3}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 1)}$

c) $\frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$

h) $\frac{1}{(x^2 + 2)^2}$

m) $\frac{2x^3 + 3x + 4}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

d) $\frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)}$

i) $\frac{x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$

n) $\frac{x^4}{(x - a)(x^2 + a^2)}$, para $a \in \mathbb{R}$

e) $\frac{3x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 - 4)}$

j) $\frac{2x^2 + x + 1}{(x - 1)^3}$

2. Descomponga en fracciones parciales en $\mathbb{C}(x)$

a) $\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)}$

b) $\frac{x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$