Prueba N° 2 Álgebra y Geometría I

I Semestre 2011

La prueba consistirá de 4 ejercicios que elegiré entre los siguientes 14. En el caso de los ejercicios con componente numérica, los valores serán modificados para la prueba.

1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una P.A. Demuestre que para p, q y r en $\mathbb{N}$ se cumple

$$(q-r)a_p + (r-p)a_q + (p-q)a_r = 0$$

2. En una progresión aritmética, el primero, el quinto y el undécimo término están en progresión geométrica. El noveno término es 4 y la suma de los primeros n términos es 650. Determine el valor de n.

3. Miguel pide un péstamo de 2500 UF al banco con una tasa de interés efectiva de 8 % anual. Naturalmente el banco calculará el interés a cobrar cada mes según el monto que falta por pagar.

   a) ¿Cuál es la tasa de interés mensual?

   b) Si paga una cantidad constante c mensualmente, calcule cuánto será el remanente de la deuda al cabo de 1 mes, 2 meses, n meses. Haga las suposiciones necesarias sobre fechas de pago y cálculo de intereses.

   c) Calcule el monto que deberá pagar mensualmente, si el crédito es a 15 años y todas las cuotas son iguales. Como no debe usar calculadora, puede dejar el resultado expresado en términos de potencias y divisiones sin realizar (no sumatorias). Debe explicar su razonamiento, la fórmula no es suficiente.

4. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\left(j^2 + \frac{3}{2^j} + n^2\right)$$

5. Calcule

$$\sum_{k=3}^{200}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{(k-1)\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)$$

6. Determine la solución y demuestre que es única.

   a) $n \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{n}{20} = \binom{n}{7}$;

   b) $k \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{45}{k} = \binom{45}{k-5}$.

   c) $n \in \mathbb{N}$ tal que $2\binom{2n}{4} = 65\binom{n}{3}$.

7. Calcule
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

8. Calcule
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

9. Determine los siguientes valores:

   a) $\cos\left(\frac{-56\pi}{3}\right)$

   b) $\text{Arcsen}(-\frac{1}{2})$

   c) $\text{Arcsen}\,(\text{sen}(10))$

   d) $\text{Arccos}\,(\text{sen}(7))$

   para c) y d) se espera respuesta exacta sin calculadora. Los números **no** son ángulos en grados.

10. Demuestre la identidad $(1 + \tan x)^2 + (1 + \cot x)^2 = (\sec x + \operatorname{cosec} x)^2$

11. Demuestre la identidad $\tan(3x) = \tan(x) \cdot \dfrac{3 - \tan^2(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$

12. Resuelva el triángulo ABC (no use calculadora) si: $\gamma = \frac{2\pi}{3}$, $c = 2\sqrt{3}$, $a = 2$

13. Resuelva el triángulo ABC (no use calculadora) si: $a = \sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3 + \sqrt{2}$

14. Demuestre que en todo triángulo cuyos lados miden a, b y c y cuyos ángulos son $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{18}$ y $\gamma = \frac{10\pi}{18}$ se tiene $c^2 = b(a + b)$. Ayuda: Lo importante es que $\gamma = 2\beta$.