

Coefficientes binomiales

1. ¿Cuántos equipos de fútbol distintos pueden formarse en un grupo de 14 personas?
2. ¿Cuántos números distintos de 3 cifras son divisibles por 5?
3. Indique cómo obtener $(a+b)^n$, $a \neq 0$, suponiendo que dispone de la expansión de $(1+x)^n$
4. Si p es un número primo y n es cualquier entero, demuestre que $n^p \equiv n \pmod{p}$.
5. Sean T_k , $k = 0, \dots, n$ los términos del desarrollo de $(a+b)^n$, donde T_k es el k -ésimo término. Encuentre:
 - (a) el quinto término de $(a+2x^3)^{17}$;
 - (b) el catorceavo término de $(3-a)^{15}$;
 - (c) el quinto término de $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{10}$;
 - (d) los dos términos centrales de $\left(3a - \frac{a^2}{6}\right)^9$ ¿Por qué hay dos términos centrales?, ¿cuántos términos centrales tendría si el exponente fuera 10?
6. Determine
 - (a) $n \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$;
 - (b) $k \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{25}{k} = \binom{25}{k-5}$.
 - (c) $n \in \mathbb{N}$ tal que $3\binom{2n}{3} = 44\binom{n}{2}$.
7. Determine el término independiente de x en el desarrollo de $(6+5x)^{12}$.
8. Determine, si existen, dos términos consecutivos con igual coeficiente (salvo la potencia de x) en el desarrollo de $(3x+2)^{19}$.
9. Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{-3} en el desarrollo de $(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15}$.
10. Encuentre el coeficiente de x^{18} en el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{3a}{x}\right)^{15}$.
11. Encuentre el coeficiente de x^{-13} en el desarrollo de $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^{41}$.
12. Demuestre que $12 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \left(2 + \frac{1}{k}\right) = n(n-1)(4n+7)$
13. Demuestre:
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$
 - (b) $\forall n \in \mathbb{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
 - (c) $\forall n \in \mathbb{N}$ si $n > 2$, entonces $2^{n-1} < n!$
 - (d) $\forall n \in \mathbb{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$
14. Calcule
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

(Sugerencia: Demuestre primero que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ si $k \geq 1$)