Inducción matemática

1. Pruebe por inducción para todo entero positivo n:

   (a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   (d) $5n^3+7n$ es divisible por 6

   (e) n^3+2n es divisible por 3

   (f) $7^{2n}+16n-1$ es divisible por 64

   (g) $5^{2(n+1)}-24n-25$ es divisible por 576

   (h) Si $h > -1$, entonces $(1+h)^n \geq 1+nh$ (desigualdad de Bernoulli)

   (i) $2^{n-1} < n!$ para $n > 2$

   (j) $2^n > n$

   (k) 24 divide a $n(n^2-1)$ cuando n es impar

   (l) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+(n+1)} \leq \dfrac{5}{6}$

   (m) $(3^{2n}-1)$ es divisible por 8

2. Suponga que tenemos infinitos números $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ uno por cada entero positivo (una *sucesión*), definidos por las reglas: $a_1 = 7$, $a_2 = 17$ y para $n \geq 3$ se tiene $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ Pruebe por inducción que para todo entero positivo n se cumple $a_n = 2^{n+1} + 3^n$.

3. Si se sabe que $4 = \dfrac{3}{a_1} = a_1 + \dfrac{3}{a_2} = a_2 + \dfrac{3}{a_3} = \cdots$, pruebe que $a_n = \dfrac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}$.

4. Dada la afirmación "para todo $n \in \mathbb{N}$, 6 divide a $(5n^3+7n)$":

   (a) Demuéstrela por Inducción, demostrando primero que para todo $n \in \mathbb{N}: n(n+1)$ es par.

   (b) Independiente de lo anterior, demúestrela directamente usando Principio del Buen Orden (Sugerencia: demuestre por contradicción y cree un conjunto adecuado para usar PBO)

5. Demuestre que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180(n-2)$

6. El plano está dividido en regiones mediante líneas rectas. Demuestre que siempre es posible colorear las regiones usando dos colores de manera que regiones adyacentes tengan colores distintos (como en un tablero de ajedrez).

7. Una triangulación de un polígono es una partición de éste en triángulos cuyos vértices son todos vértices del polígono original. Diremos que dos vértices son adyacentes si están conectados por una arista de un triángulo. Se desea colorear los vértices del polígono de manera que vértices adyacentes tengan colores diferentes. Demuestre que el menor número de colores necesarios para lograrlo siempre es tres.

8. Demuestre usando inducción que el producto de 3 enteros consecutivos es siempre divisible por 6. (Una demostración directa podría ser más sencilla pero no es lo que se pide aquí)

9. Demuestre que
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

10. Sea x un número real tal que $x + x^{-1}$ es un número entero. Demuestre que $x^n + x^{-n}$ es un entero para todo n entero positivo.

11. Demuestre que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.