Fracciones Racionales

1. **Introducción.**

   El conjunto $\mathbb{R}[X]$ de los polinomios con coeficientes reales, provisto de la adición y multiplicación que ya conocemos, es un anillo conmutativo con elemento unidad. Es decir, ambas operaciones son conmutativas, asociativas y poseen elemento neutro: el cero y el uno, respectivamente. En la adición , cada elemento tiene un opuesto aditivo, lo que significa que para cada $p \in \mathbb{R}[X]$, existe $q \in \mathbb{R}[X]$ tal que $p + q = 0$ $(i.e. q = -p)$. Por último, la multiplicación es distributiva respecto de la adición.

   Todas estas propiedades son las mismas que ocurren en el caso del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, con sus respectivas adición y multiplicación. En el caso de $\mathbb{Z}$, la ausencia de inversos multiplicativos se resuelve con la construcción de los números racionales $\mathbb{Q}$, que contiene los elementos de la forma $\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ y consideramos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Esto hace de $\mathbb{Q}$ un cuerpo conmutativo, es decir, un anillo conmutativo donde todo elemento distinto de cero es invertible para la multiplicación.

   Para el caso de $\mathbb{R}[X]$ se procede de un modo similar. Si $p, q \in \mathbb{R}[X]$, $q \neq 0$, se llama una **fracción racional** a un elemento de la forma $\frac{p}{q}$. Es importante considerar la siguiente definición de igualdad entre fracciones racionales, tal como en el caso en $\mathbb{Q}$:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = qp', \qquad p, p', q, q' \in \mathbb{R}[X], \quad q \neq 0, \ q' \neq 0.$$

   El conjunto de todas las fracciones racionales se designará en este caso por $\mathbb{R}(X)$ y se considerará $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{R}(X)$.

   En $\mathbb{R}(X)$ se define una adición y una multiplicación de la misma forma como se han definido esas mismas operaciones en $\mathbb{Q}$ y las propiedades de estas operaciones coinciden con lo ya dicho para $\mathbb{Q}$. Es decir, $\mathbb{R}(X)$ resulta ser un cuerpo conmutativo.

   Ejemplos de fracciones racionales son:

$$\frac{3x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{x-1}{2x^2 - 3}, \quad 5x^3 - 2x + 3, \qquad 1003$$

   En lo que sigue, nos preocuparemos sólo de un aspecto referente a fracciones racionales: su descomposición. Esto es, dada una fracción racional, se quiere encontrar una descomposición de ella como suma de fracciones racionales más simples, en algún sentido. Ello, porque estas descomposiciones facilitan algunos aspectos del Cálculo Integral, como cuando se requiere la integración de funciones reales provenientes de funciones racionales, por ejemplo.

2. **Descomposición de Fracciones Racionales.**

Consideremos $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(X)$. Si $gr\, p \geq gr\, q$, sabemos que existen únicos $d, r \in \mathbb{R}[X]$ tales que

$$p = dq + r, \quad \text{con} \quad r = 0 \quad \text{ó} \quad gr\, r < gr\, q$$

De donde

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \mathbf{d} + \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{gr\, r} < \mathbf{gr\, q} \tag{1}$$

Es decir, se puede descomponer una fracción racional en la suma de un polinomio (su "parte entera") y una fracción en que el grado de su numerador es inferior al grado del denominador. En lo sucesivo nos preocuparemos de fracciones con esta última condición.

Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(X)$, con $gr\, p < gr\, q$. Supongamos, además, que $q = q_1 \cdot q_2$, con q_1 y q_2 relativamente primos.

Por lo tanto existen $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[X]$ tales que

$$\begin{aligned} 1 &= q_1 h_1 + q_2 h_2 \\ p &= p q_1 h_1 + p q_2 h_2 \\ \tfrac{p}{q} &= \tfrac{p}{q_1 \cdot q_2} = \tfrac{p h_1}{q_2} + \tfrac{p h_2}{q_1} \end{aligned}$$

Nos interesa encontrar una descomposición tal que para cada sumando tenga un numerador de grado inferior a su denominador.

Dividiendo ph_1 por q_2 y ph_2 por q_1 se obtiene

$$\begin{aligned} ph_1 &= q_2 d_2 + r_2, \quad \text{con} \quad r_2 = 0 \ \text{ o } \ gr\, r_2 < gr\, q_2 \\ ph_2 &= q_1 d_1 + r_1, \quad \text{con} \quad r_1 = 0 \ \text{ o } \ gr\, r_1 < gr\, q_1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p &= q_1(q_2 d_2 + r_2) + q_2(q_1 d_1 + r_1) \\ p &= q_1 q_2 d_2 + q_1 r_2 + q_2 q_1 d_1 + q_2 r_1 \\ p &= q(d_1 + d_2) + q_1 r_2 + q_2 r_1 \end{aligned}$$

Como $gr(q_1 r_2) < gr\, q$ y $gr(q_2 r_1) < gr\, q$, tendría que ser $gr\, p = gr(q(d_1 + d_2))$. Pero $gr\, p < gr\, q$, por lo que la última igualdad no puede ocurrir, salvo que $d_1 + d_2 = 0$.

De lo anterior,

$$\begin{aligned} p &= q_1 r_2 + q_2 r_1 \\ \tfrac{p}{q} &= \tfrac{p}{q_1 q_2} = \tfrac{r_2}{q_2} + \tfrac{r_1}{q_1} \quad \text{con} \quad gr\, r_i < gr\, q_i \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que hemos encontrado dos descomposiciones

$$\tfrac{p}{q} = \tfrac{r_1}{q_1} + \tfrac{r_2}{q_2} = \tfrac{r_1'}{q_1} + \tfrac{r_2'}{q_2} \quad \text{con} \quad gr\, r_i < gr\, q_i, \quad gr\, r_i' < gr\, q_i.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \tfrac{r_1}{q_1} - \tfrac{r_1'}{q_1} &= \tfrac{r_2'}{q_2} - \tfrac{r_2}{q_2} \\ (r_1 - r_1')q_2 &= (r_2' - r_2)q_1 \end{aligned}$$

y como q_2 es primo con q_1, luego $q_2/(r_2' - r_2)$. Pero $gr(r_2' - r_2) < gr\, q_2$, por lo que debe ser $r_2' - r_2 = 0$. Del mismo modo $r_1 = r_1'$. Todo esto nos asegura la unicidad de la descomposición en estas condiciones.

En definitiva, hemos demostrado la siguiente:

Proposición:
Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}(X)$, $gr\, p < gr\, q$, $q = q_1 q_2$ con q_1 y q_2 relativamente primos, entonces se puede escribir, de una única manera

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{r_1}}{\mathbf{q_1}} + \frac{\mathbf{r_2}}{\mathbf{q_2}}, \quad \text{con} \quad \mathbf{gr\, r_i} < \mathbf{gr\, q_i} \tag{2}$$

Corolario:
Usando la proposición anterior reiterativamente, se obtiene

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q_1 q_2 \dots q_k}} = \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{q_1}} + \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{q_2}} + \dots + \frac{\mathbf{p_k}}{\mathbf{q_k}}, \qquad \mathbf{gr\, p_i} < \mathbf{gr\, q_i} \tag{3}$$

siendo q_i relativamente primo con q_j, todo $i \neq j$.

Recordemos que los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[X]$ son sólo polinomios de grado 1 ó grado 2. Consideremos ahora fracciones racionales cuyo denominador son potencias de dicho tipo de polinomios.

Sea $q = (x-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[X]$ con $gr\, p < n$.

Dividiendo p por $(x-a)$ se tiene $p = d(x-a) + a_1$, con $a_1 \in \mathbb{R}$. Entonces

$\frac{p}{(x-a)^n} = \frac{d}{(x-a)^{n-1}} + \frac{a_1}{(x-a)^n}$.

Del mismo modo

$$\frac{d}{(x-a)^{n-1}} = \frac{d_1}{(x-a)^{n-2}} + \frac{a_2}{(x-a)^{n-1}}, \quad gr\, d_1 < n-2, \quad a_2 \in \mathbb{R}$$

Se reitera el procedimiento hasta obtener

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{(x-a)^n}} = \frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{(x-a)^n}} + \frac{\mathbf{a_2}}{\mathbf{(x-a)^{n-1}}} + \dots + \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{(x-a)}}, \quad \mathbf{a_i} \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Consideremos ahora el caso $q = (ax^2 + bx + c)^n$, donde $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}(X)$ es irreducible.

Dividiendo p por $ax^2 + bx + c$, resulta

$$p = d(ax^2 + bx + c) + (a_1 x + b_1), \quad \text{con} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

y

$$\frac{p}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{d}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{a_1 x + b_1}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Se reitera el procedimiento, con $\frac{d}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$ y asi sucesivamente, hasta que resulta finalmente

$$\mathbf{\frac{p}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{a_1 x + b_1}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{a_2 x + b_2}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_n x + b_n}{(ax^2 + bx + c)}}, \quad \mathbf{a_i, b_i} \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Obs: Todo el tratamiento anterior se efectua del mismo modo para las fracciones racionales $\mathbb{C}(X)$ de $\mathbb{C}[X]$. Basta llegar a la descomposición (4), pues los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ son de grado 1.

3. **Ejemplos.**

   a) Descomponer la fracción racional $\frac{2x-3}{x^2-3x+2} \in \mathbb{R}(X)$.

   Aquí $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ es reducible. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{(x-2)(x-1)} &= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x-2)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \frac{(a+b)x-(a+2b)}{(x-2)(x-1)} \end{aligned}$$

   Comparando coeficientes: $a + 2b = 3$, $a + b = 2$. También, si se quiere:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow -1 = -b \\ x = 2 &\Rightarrow 1 = a \end{aligned}$$

   En todo caso, $\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}$

b) Descomponer $\frac{1}{x(x^2+x+1)^2} \in \mathbb{R}(X)$ (x^2+x+1) es irreducible en $\mathbb{R}[X]$.

La forma de la descomposición deberá ser:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} &= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+x+1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} \\ &= \frac{a(x^2+x+1)^2 + x(bx+c) + (dx+e)(x^2+x+1)x}{x(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

Entonces:
$x = 0 \Rightarrow a = 1$
El coeficiente de x^4 en el numerador de la derecha es $a+d$ y como debe ser $a+d=0$, entonces $d=-1$.
El coeficiente de x^3 es $2a+d+e=0 \Rightarrow e=-1$
$x=-1 \Rightarrow a+b-c+d-e=1 \Rightarrow b=c.$

Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $z^2+z+1=0$, entonces $z^2b+zc=1$, de donde
$z^2b+zb = b(z^2+z) = 1 \quad \Rightarrow \quad b(-1)=1 \quad \Rightarrow \quad b=-1=c.$

Un procedimiento más natural consiste en ordenar el polinomio del numerador de la derecha respecto a las potencias de x y luego comparar sus coeficientes con el polinomio del numerador de la izquierda. Esto lleva a un sistema de ecuaciones, que en este caso es de cinco incógnitas y cinco ecuaciones. En todo caso

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x+1}{(x^2+x+1)}$$

iii) Descomponer la fracción racional $\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} \in \mathbb{R}(X)$.

La descomposición será de la forma

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^3} &= \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)}, \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{a+b(x-1)+c(x-1)^2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Si ponemos $y = x-1$, es decir, $x = y+1$, resulta

$$2x^2+x+1 = 2(y+1)^2 + (y+1) + 1 = 2y^2+4y+2+y+2 = 2y^2+5y+4$$

Igualando los numeradores de la fracción, se tiene

$$2y^2 + 5 + 4 = a + by + cy^2,$$

de donde

$$a = 4, \quad b = 5, \quad c = 2$$

y por lo tanto

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)^2} = \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)}$$

Lo anterior es equivalente a desarrollar el numerador de la derecha como polinomio en x a igualar coeficientes con el numerador de la izquierda.