Geometría Diferencial.
Guía 6

1. Sea p un punto de la superficie S sea v un vector unitario en T_pS. Decimos que v es una dirección asitótica si $\langle v, -d_pN(v)\rangle_p = 0$. Demuetre que el punto p es:

   (a) Elíptico $\Leftrightarrow$ No existen direcciones asitóticas.

   (b) Parabólico $\Leftrightarrow$ Existe una dirección asitótica.

   (c) Hiperbólico $\Leftrightarrow$ Existen dos direcciones asitóticas.

   (d) Planar $\Leftrightarrow$ Todas las direcciones son asitóticas.

2. Sean S una superficie y P un plano tal que existe una curva regular $\alpha : I \longrightarrow S$, tal que S es tangente a P en todo punto de $\alpha(I)$. Demuestre que todos esos puntos son parabólicos o planares.

3. Sea p un punto hipebólico de S tal que existe un entorno U de p en S para el cual $p + T_pS \cap U$ es la unión de dos curvas regulares que se cruzan en p. Demuestre que la curvatura normal de aquellas curvas en p es cero.

4. Demuestre o de contraejemplo. Si la curvatura de Gauss de una superficie es positiva en todo punto, entonces para cualquier curva la curvatura normal es siempre positiva.

5. Demuestre que toda superficie de revolución S con curvatura de Gauss constante $K = 0$ está contenida en un plano, un cilindro, o un cono.

6. Demuestre que toda superficie de revolución S con curvatura de Gauss constante $K = -1$ está generada por una de la siguientes curvas $\alpha(t) = (\rho(t), 0, z(t))$.

   (a) $\rho(s) = Acosh(s), z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - A^2 senh^2(t)}dt, A > 0$.

   (b) $\rho(s) = Ae^{-s}, z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - A^2 e^{-2t}}dt, A > 0$.

   (c) $\rho(s) = Asenh(s), z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - A^2 cosh^2(t)}dt, 1 > A > 0$.

7. Sea $p_0 \in S$ tal que $N(p_0) \neq 0$ y (φ, U) una parametrización en p_0 de S tal que $\varphi(0,0) = p_0$ y $K = K \circ \varphi$ no cambia de signo en $\varphi(U)$. Demuestre que:

   (a) $N_u \times N_v = K(u,v)(\varphi_u \times \varphi_v)$.

   (b) Dado $V \subseteq \varphi(U)$, el área de $N(V) \subseteq S^2$ está dada por

   $$\int_V |K| d\sigma = \int\int_{\varphi^{-1}(V)} K(u,v)) \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} dudv.$$

8. Para cada función ϕ de la siguiente lista calcule la segunda forma fundamental, las direcciones principales y asintóticas, las curvaturas principales, media y de Gauss de cada punto de la supeficie S definida por ϕ. Verifique si las curvas coordenadas, son lineas de curvatura, lineas asitóticas o geodésicas:

   (a) $\phi(u,v) = (acos(u), asen(u), v), a > 0$. (Cilindro)

   (b) $\phi(u,v) = ((a + bcos(v))cos(u), (a + bcos(v))sen(u), sen(v))$, $a, b > 0$. (Toro)

   (c) $\phi(u,v) = (vcos(u), vsen(u), bv), b > 0$. (Helicoide)

   (d) $\phi(u,v) = (cosh(v)cos(u), cosh(v)sen(u), bv), b > 0$. (Catenoide)

9. Demuestre que en la Helicoide del problema anterior, la Hélice definida por $\alpha(t) = (acos(t), asen(t), bt)$ es una curva asintótica ($a > 0$ fijo).

10. Demuestre que si α es una curva asintótica de una superficie S, entonces para todo s_0 el plano tangente a S en $\alpha(s_0)$ coincide con el plano osculador de la curva en $\alpha(s_0)$.

11. Demuestre que una curva en la esfera S^2 es una geodésica si y sólo si está contenida en un círculo máximo (es decir un círculo cuyo radio es el radio de la esfera)