# Geometría Diferencial.
# Guía 4

1. Encuentre un base del plano tangente a la esfera de radio 5 en $(3, 4, 0)$.
2. Encuentre un base del plano tangente al toro definido en el ejercicio 5 de la guía 1 en el punto $(3, 0, 0)$.
3. Consideremos el giro $f : S^2 \longrightarrow S^2$ en $\theta$ radianes al rededor del eje vertical. Para todo $p \in S^2$ y todo $v \in T_pS^2$ encuentre $d_pf(v)$.
4. Sea $U$ abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que la superficie regular $\Gamma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ es difeomorfa a un plano. Demuestre que dos los gráficos de dos funciones son superficies difeomorfas.
5. Utilice el problema anterior para demostrar que las superficies $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2\}$ son difeomorfas.
6. Sea $S$ la superficie de revolución dada por la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 4 + x^2\}$. Demuestre que es difeomorfa a un cilindro.
7. Sean $S_1$ y $S_2$ dos superficies regulares y sea $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una función diferenciable. Sea $p \in S_1$ tal que $d_pf : T_pS_1 \longrightarrow T_{f(p)}S_2$ es isomorfismo. Demuestre que existen $U$ y $V$ abiertos de $\mathbb{R}^3$ tales que $p \in U, f(p) \in V$ y $f : U \cap S_1 \longrightarrow V \cap S_2$ es difeomorfismo.
8. Sea $S = P_1 \cup P_2$, donde $P_1$ y $P_2$ son planos paralelos distintos. Demuestre que $S$ es una superficie regular orientable pero no conexa ¿Cuantas orientaciones tiene?

9. Sean $S_1$ y $S_2$ superficies regulares y sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferencible tal que $f(S_1) \subseteq S_2$. Demuestre que $f\mid_S$ es diferenciable como funición de $S_1$ a $S_2$. Demuestre el resultado análogo para fuciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Utilice eso para demostrar que las siguentes funciones son diferenciables
   (a) Sea $v \in S^2$. Sea $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(p) = p \cdot v$.
   (b) Sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Sea $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(p) = ||p - p_0||^2$.

10. Sean $S_1$ y $S_2$ dos superficies regulares. Decimos que se intersectan transversalmente si para todo $p \in S_1 \cap S_2$ se tiene $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Demuestre que si $S_1$ y $S_2$ se intersectan transversalmente entonces para todo $p$ en la intersección existe una vecindad $V$ tal que $S_1 \cap S_2 \cap V$ es el trazo de una curva regular.

11. Averigue si la función antpoda $h : S^2 \longrightarrow S^2, h(x, y, z) = (-x - y - z)$ preserva o invierte orientación.

12. Sea $S$ una superficie de revolución (ver ejercicio 4 guía 3). Demuestre que es orientable.

13. Sea $S = M \setminus C$ donde $M$ es la cinta de Möebius dada por $M = \phi(\mathbb{R} \times (-1, 1))$ con $\phi(\theta, t) = ((2 - tsen\frac{\theta}{2})cos\theta, (2 - tsen\frac{\theta}{2})sen\theta, tcos\frac{\theta}{2})$ y $C = \{(x, y, z) \in M \mid z = 0\}$. Demuestre que $S$ es orientable.

14. Demuestre la siguiente afirmación o de un contraejemplo: Sea $S$ conexa y orientable. Sea $f : S \longrightarrow S$ difeomorfismo. Entonce la función $f \circ f$ es un difeomorfismo que preserva orientación.

15. Sea $S$ superficie regular conexa. Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable tal que para todo $\alpha : I \longrightarrow S$ donde $I$ es un intervalo y todo $t \in I$ se tiene $(f \circ \alpha)'(t) = 0$. Demuestre que $f$ es constante. .

16. Demuestre que si dada una superficie $S$ existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ la recta ortogonal a $T_pS$ que pasa por $p$ pasa por $p_0$, entonces $S$ está contenida en una esfera.