Geometría Diferencial.
Guía 5

1. Encuentre los coeficientes de la primera forma fundamental para las superficies y partametrizaciones dadas.

   (a) La helicoide: Para cada punto de la curva parametrizada por $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$ considere la recta L_t que une $\alpha(t)$ con el punto $(0, 0, t)$. Escoja una parametrización.

   (b) La esfera S^2 parametrizada por la inversa de la proyección estereográfica.

   (c) Una superficie de revolución con la parametrización usual.

2. Sea C el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Encuentre todas la curvas de C tales que cortan a las rectas verticales en un ángulo constante.

3. Sea S una superficie y sea (ϕ, U) una parametrezación de S. Llamemos a las curvas $\phi(t, 0)$ y $\phi(0, t)$ las curvas coordenadas de ϕ. Demuestre que todo cuadrilatero formado por curvas coordenadas tiene lados opuestos de igual longitud si y solo si $E_v = G_u = 0$.

4. Sean $f : S_1 \longrightarrow S_2$ un difeomorfismo preserva áreas si $area(\Delta) = area(f(\Delta))$ para todo Δ abierto de S_1.

   (a) Sean $\varphi : U \longrightarrow S_1$, $\psi : U \longrightarrow S_2$ dos parametrizaciones de dos superficies. Demuestre que $\psi \circ \varphi^{-1}$ preserva áreas si y sólo si $EG - F^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental para φ y $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ son los coeficientes de la primera forma fundamental para ψ.

   (b) Muestre que la función antípoda $S^2 \longrightarrow S^2$ tal que $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$ preserva áreas.

5. Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y sea Γ el gráfico de una función diferenciable $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere la función $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Demuestre que π es un difeomorfismo que contrae áreas, es decir, $area(\pi(W)) \leq area(W)$ para todo W abierto de γ. Demuestre que si π preserva áreas entonces Γ está contenida en un plano horizontal.

6. Sea S una superficie orientable y $p \in S$ para cada curva regular α y t real tal que $\alpha(t) = p$ defina $k_n(\alpha, t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(p) \rangle_p}{v^2(t)}$ donde $v(t) = ||\alpha(s)||$. Demuestre que k_n es invariante bajo reparametrización. Cocluya que $k_n(\alpha, t)$ es la curvatura normal de α en p.

7. Describa la imagen de la aplicación de Gauss, para las siguientes superficies S dadas por la ecuación:

   (a) $z = x^2 + y^2$.

   (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   (c) $x^2 + y^2 = cosh(z)^2$.

8. Calcule las curvaturas principales en $(0, 0, 0)$, para las siguientes superficies S dadas por la ecuación:

   (a) $z = x^2 + y^3$.

   (b) $z = x^2 + y^4$.

   (c) $z = x^3 - 3xy^2$..

   Esboce la superficie (c) indicando las regiones que quedan sobre y debajo del plano de ecuación $z = 0$.

9. Sea S una superficie regular, sea $p \in S$ y sean $w_1, w_2 \in T_pS$ dos vecctores ortogonales. Demuestre que si α y β son curvas en S tales que $\alpha(t) = \beta(s) = p$ con $\alpha'(t) = w_1$ y $\beta'(s) = w_2$ entonces el promedio de $k_n(\alpha, t)$ y $k_n(\beta, s)$ es igual a la curvatura media.

10. Demuestre que la curvatura media se puede calcular por $H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta$. Donde $k_n(\theta) = k_n(\alpha, s)$ donde α es una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\alpha(s) = p$ y el ángulo entre $\alpha'(s)$ y una de las direcciones principales $w_1(p)$ es θ.