Geometría Diferencial.

Guía 3

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable. Demuestre que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ es una superficie regular que tiene una parametrización global.
2. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera de radio 1 y centro 0, sea $n = (0, 0, 1)$ para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tome la recta que une n con $(u, v, 0)$. Sea $\phi(u, v)$ el punto de intersección entre la recta y la esfera $\mathbb{S}^2$. Encuentre fórmulas para ϕ y su inversa. Demuestre que esto da una reparametrización de $\mathbb{S}^2$ que necesita sólo dos abiertos. Ayuda para la inversa: Si $\phi(u, v) = (x, y, z)$ haga $t = z$ en la ecuación de la recta. Esta inversa se llama la proyección estereográfica.
3. Sea S el elipsoide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$. Demuestre que S es una superficie regular. Encuentre una parametrización.
4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que α es un homeomorfismo entre I y $\alpha(I)$. Supongamos que $\alpha(t) = (\rho(t), 0, z(t))$ con $\rho(t) > 0$. Demuestre que la superficie de revolución obtenida al rotar $\alpha(I)$ en torno al eje z es una superficie regular con parametrización

$$\phi : (-\pi, \pi) \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi(u, v) = (\rho(v)\cos(u), \rho(v)\sin(u), z(v)).$$

Para mostrar que ϕ^{-1} es continua use que la formula $\tan(\frac{u}{2}) = \frac{\sin(u)}{1+\cos(u)}$ y el hecho que $\tan(\frac{u}{2})$ es un difeomorfismo entre $(-\pi, \pi)$ y $\mathbb{R}$. ¿Cuántos abiertos distintos requiere esta parametrización ?

5. Utilice el problema anterior para dar otra parametrización para la esfera y para la elipsoide. Utilícelo también para dar una parametrización del Toro $\mathbb{T}^2$ que se obtiene al girar la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - 2)^2 + z^2 = 1, x = 0\}$ en torno al eje z .

6. Demuestre que toda superficie regular es localmente una superficie de nivel. Es decir que para todo $p \in S$ existe un abierto V de $\mathbb{R}^3$ y una función infinitamente diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V \cap S = f^{-1}(0)$ y 0 es valor regular.
7. Sean P_1 y P_2 dos planos distintos en $\mathbb{R}^3$ encuentre una condición necesaria y suficiente para que $P_1 \cup P_2$ sea una superficie regular.
8. Demuestre que la elipsoide es difeomorfa a la esfera y que el paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ es difeomorfo a un plano. Encuentre los difeomorfismos explícitamente.
9. Defina explícitamente una función diferenciable del toro $\mathbb{T}^2$ a la esfera $\mathbb{S}^2$ que sea epiyectiva.
10. Considere $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$. Sea $S = F^{-1}(1)$. Demuestre que es superficie regular y calcule las ecuaciones de los planos tangentes a S que sean paralelos al plano de ecuación $2\sqrt{2}x + y + z = 0$.
11. Sea (a, b, c) un vector de $\mathbb{R}^3$ no nulo. Considere la función $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \neq 0\}$ y

$$\phi(u, v) = \left(\frac{a(uv + 1)}{u + v}, \frac{b(u - v)}{u + v}, \frac{c(uv - 1)}{u + v} \right).$$

Sea S la imagen de ϕ . Encuentre una ecuación que defina implícitamente S y demuestre que S es una superficie regular. Calcule el plano tangente en cada punto de S .

12. Sea V un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de una superficie S y se cumple $\phi(u, v) = f(u) + g(v)$ para todo $(u, v) \in V$, donde f y g son funciones infinitamente diferenciables de variable real. Demuestre que los planos tangentes a S a lo largo de la curva $\phi(u, 0)$ son todos paralelos a una misma recta.