Geometría Diferencial.
Guía 2

1. Probar que el trazo de la curva $(\cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen} t)$ está en la superficie de una esfera de radio 1.

2. parametrice la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$ y encuentre la longitud de arco de dicha intersección.

3. Probar que la curva mas corta que une un punto del plano $z = 0$ con un punto del plano $z = 1$ es un segmento vertical.

4. Encuentre el plano osculador a la curva $\alpha(t) = (t, t^2, \cos t)$ en $t = 0$.

5. Encuentre la curvatura de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 0$.

6. Encuentre la torsión de la curva
$$\alpha(t) = \left(\frac{t^7 - t^5}{t^4 + \cos t + e^t}, 5t^2, 3t^2 - 8 \right)$$
en el punto $t = 27\sqrt{\pi}$.

7. Determine para que valores de p la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^p)$ tiene torsión nula.

8. Probar que si α_1 y α_2 son curvas parametrizadas por longitud de arco cuyas tangentes respectivas satisfacen $T_1(s) = T_2(s)$ para todo s, entonces α_1 se obtiene componiendo la curva α_2 con una traslación. Que puede decirse si $B_1(s) = B_2(s)$ para todo s?

9. Resuelva el problema 13 de la guía 1 usando el teorema de unicidad de curvas.

10. Sea $\alpha(s) = \Big(x(s), y(s), z(s)\Big)$ una curva regular en el espacio parametrizada por longitud de arco. Decimos que α es una hélice si existe un vector

no nulo v tal que el álgulo entre $T'(s)$ y v es constante. Decimos entonces que α es una hélice con dirección v. Probar que α es una helice en la dirección $(0,0,1)$ si y sólo si z es una función lineal de s.

11. Dadas las siguientes curvas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ determine para cada par si existe movimiento rígido que lleva una en la otra:

    (a) $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$
    (b) $\beta(t) = (1-t, 2-sen(t), cos(t))$
    (c) $\gamma(t) = (sen(t), cos(t), 2t)$

12. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Defina $k(t)$ y $v(t)$ como en el problema 10 de la guía 1. Defin $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{v(t)}$, $N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$ y $B(t) = T(t) \times N(t)$. Demuestre que estas funciones vectoriales satisfacen las identidades:

    (a) $\frac{T'(t)}{v(t)} = k(t)N(t)$
    (b) $\frac{N'(t)}{v(t)} = -k(t)T(t) - \tau(t)B(T)$
    (c) $\frac{B'(t)}{v(t)} = \tau(t)N(t)$

    Para cierta función τ. Demuestre que si α está parametrizada por longitud de arco entonces las funciones T, N, B son el triedro de Frenet, τ es la torsión y las identidades $(a), (b)$ y (c) son la fórmulas de Frenet. Demuestre tambíen que si $\beta = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α entonces $T_\beta = T_\alpha \circ h, N_\beta = N_\alpha \circ h, B_\beta = B_\alpha \circ h$ y $\tau_\beta = \tau_\alpha \circ h$.

13. Sea α una curva parametrizada por longitud de arco tal que $k(s) \neq 0$ para todo s. Sea P un plano tal que

    (a) Existe un s_0 tal que la recta tangenta a α en s_0 está contenida en P.
    (b) Si llamamos P^+ y P^- a los semiespacios separados por P, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $\alpha(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap P^+ \neq \emptyset$ y $\alpha(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \cap P^+ \neq \emptyset$

    Demuestre que P es el plano osculador de α en s_0. (Ayuda haga una expansión de Taylor de segundo orden de α en s_0.)

14. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Sea π la proyección de $\mathbb{R}^3$ en el plano osculador de α en $s_0 \in I$ Defina $\beta = \pi \circ \alpha$. Demuestre que la curvatura de β en s_0 es igual a la curvatura de α en s_0.