

Geometría Diferencial.

Guía 1

1. Sean $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\beta : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas regulares inyectivas con el mismo trazo de curva ($\alpha(a, b) = \beta(c, d)$.) Demuestre que $\beta^{-1} \circ \alpha$ es una función real de (a, b) en (c, d) un difeomorfismo cuya derivada nunca se anula.
2. Determine cuales de las siguientes funciones de un intervalo I en $\mathbb{R}$ son curvas regulares. Calcule el vector tangente cuando se pueda.
 - (a) $I =]-1, 1[, \alpha(t) = (t, t^2)$.
 - (b) $I =]-1, 1[, \alpha(t) = (t^2, t^3)$.
 - (c) $I =]1, 5[, \alpha(t) = (t^2, t^3)$.
 - (d) $I =]-\pi, \pi[, \alpha(t) = (\sin t, \cos t)$.
 - (e) $I =]-\pi, \pi[, \alpha(t) = (\sin t, \cos 2t)$.
 - (f) $I =]-\pi, \pi[, \alpha(t) = (\sin 2t, \cos 3t)$.
 - (g) $I =]-1, 1[, \alpha(t) = (t, |t|)$.
 - (h) $I =]1, 5[, \alpha(t) = (t, |t|)$.
3. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular tal que $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha(t)$ para todo t demuestre que el trazo de α está contenido en una circunferencia centrada en el origen.
4. Para los siguientes pares de curvas, determine si la segunda es o no una parametrización de la primera en algún intervalo. En caso afirmativo, determine los mayores intervalos en los que esto ocurre.
 - (a) $\alpha(t) = (1 - t, t^2 - 2t), \beta = (\sin t, \cos^2 t)$.
 - (b) $\alpha(t) = (\sin t, \cos t), \beta(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$.
 - (c) $\alpha(t) = (\sin t, \cos t), \beta(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$.
5. Encuentre el largo de las siguientes curvas en el intervalo dado:
 - (a) $\alpha(t) = (t, t^2), I = (-2, 2)$.
 - (b) $\alpha(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t), I = (0, \pi/2)$.
 - (c) $\alpha(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t), I = (0, \pi)$.
 - (d) $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right), I = (-\infty, \infty)$.

6. Reparametrice las siguientes curvas por longitud de arco.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \alpha(t) = (t, t^2). & \text{(c)} \quad \alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right). \\ \text{(b)} \quad \alpha(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t). & \end{array}$$

7. Reparametrice la curva

$$\beta(r) = (\tanh^2 r, \operatorname{sech}^2 r),$$

donde $\tanh r = \frac{\sinh r}{\cosh r}$ y $\operatorname{sech} r = \frac{1}{\cosh r}$, por longitud de arco.

8. Encuentre el vector tangente unitario la recta tangente y la curvatura de la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ en $t = 0$.

9. Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (e^{bt} \cos(t), e^{bt} \sin(t))$ donde b es una constante negativa.

- (a) Dibuje el trazo de α
- (b) ¿Es la curvatura es una función creciente?
- (c) Demuestre que el largo del trazo de α entre un t_0 y el infinito es finito. Calcule ese valor.

10. Sea $\alpha_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Defina $v_0(t) = \|\alpha'_0(t)\|$ y $k_0(t) = \frac{1}{v_0(t)} \|T'_0(t)\|$ donde $T_0(t)$ es el vector tangente unitario. Demuestre que si $\alpha_1 = \alpha_0 \circ h$ es una reparametrización de α_0 entonces $k_1 = k_0 \circ h$. Concluya que $k_0(t)$ es la curvatura en $\alpha_0(t)$.

11. Calcule la curvatura $k(t)$ si $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t, \cosh(t))$.

12. Determine la curvatura de la curva $\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du, \int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \right).$$

Dibuje el trazo de la curva.

13. Demuestre que si una curva plana regular α tiene curvatura constante no nula entonces su trazo está contenido en una circunferencia.