

PRUEBA II

MATEMÁTICAS IV (PRIMAVERA 2010)

1.- Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.1) Determine si son matrices diagonalizables o no. Justifique su respuesta (2pts.)

1.2) Diagonalice la(s) matriz(ces) diagonalizable (4pts.)

Solución de 1.1): El polinomio característico de la matriz A es:

$$\lambda^2 - 12\lambda + 35 = (\lambda - 5)(\lambda - 7),$$

por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 7$ (ambos de multiplicidad uno).

Ahora, calculamos el subespacio vectores propios asociado a $\lambda_1 = 5$. Para eso, resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Es fácil observar que el sistema es equivalente a la ecuación:

$$3u - v = 0$$

y por lo tanto todo vector propio es de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 3u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, el subespacio V_{λ_1} tiene dimensión uno (la dimensión coincide con la multiplicidad).

Ahora, calculamos el subespacio vectores propios asociado a $\lambda_2 = 7$. Para eso, resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Es fácil observar que el sistema es equivalente a la ecuación:

$$u - v = 0$$

y por lo tanto todo vector propio es de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el subespacio V_{λ_2} tiene dimensión uno (la dimensión coincide con la multiplicidad).

Por lo tanto, la matriz A es diagonalizable pues en ambos casos, la multiplicidad de los valores propios coincide con la dimensión de sus subespacios asociados.

El polinomio característico de la matriz B es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

por lo tanto, la matriz A tiene un único valor propio $\lambda_1 = 1$ (de multiplicidad dos).

Ahora, calculamos el subespacio vectores propios asociado a $\lambda_1 = 1$. Para eso, resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Es fácil observar que el sistema es equivalente a la ecuación:

$$u = v$$

y por lo tanto todo vector propio es de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el subespacio V_{λ_1} tiene dimensión uno (la dimensión es menor que la multiplicidad). Por lo tanto, la matriz B no es diagonalizable.

Solución de 1.2): Sea P una matriz cuyas columnas son vectores propios de A :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa de P viene dada por

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, notemos que

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 15 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.- Considere los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.1) Encuentre un conjunto de soluciones particulares para el primer sistema.

2.2) Encuentre la solución del primer sistema tal que $x(0) = y(0) = 2$.

2.3) Encuentre la solución de segundo sistema tal que $x(0) = y(0) = 2$.

Solución de 2.1): Las soluciones particulares son

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} \quad y \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Solución de 2.2): Toda solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Dada la condición inicial, la solución se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y será fácil verificar que $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$.

Por lo tanto, la solución (considerando esas condiciones iniciales) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Solución de 2.3): Las soluciones particulares son

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad y \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^t$$

Ahora, buscaremos cuales son las constantes a, b, c, d . Notemos que:

$$u_2'(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} a + b + bt \\ c + d + dt \end{pmatrix} e^t.$$

Por otro lado, notemos que:

$$Bu_2(t) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} c + dt \\ -a + 2c + \{-b + 2d\}t \end{pmatrix} e^t$$

Por lo tanto, $u_2'(t) = Bu_2(t)$ si y solo si a, b, c, d son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} a + b = c \\ b = d \\ c + d = -a + 2c \\ d = -b + 2d \end{cases}$$

Reescribimos el sistema:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ b - d = 0 \\ a - c + d = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$$

Notemos que $b = d$ y el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales deben satisfacer la restricción:

$$a - c = b = d$$

Sea $b = d = 1$, como $a - c = 1$ elegimos $a = 1$ y $c = 2$. Luego se tiene que toda solución del sistema es del tipo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2 + t \end{pmatrix} e^t$$

Dada la condición inicial, evaluamos en $t = 0$ y la solución se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y será fácil verificar que $c_1 = 2$ y $c_2 = 0$.

3.- Considere la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x'' + 2x' + 2x = 0.$$

- 3.1) Escriba la ecuación como un sistema lineal de ecuaciones diferenciales (1 punto).
- 3.2) Encuentre la solución del sistema tal que $x(0) = y(0) = 1$.
- 3.3) Calcule el límite (cuando $t \rightarrow +\infty$) de cualquier solución del sistema.

Solucion de 3.1): Hacemos los cambios de variable $x = x_1$ y $x' = x_2$.
Notemos que:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Solución de 3.2: Es fácil concluir que el polinomio característico es:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$.

Ahora, calculamos el subespacio vectores propios asociado a $\lambda_1 = -1 + i$.

Para eso, resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (-1 + i) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Es fácil observar que el sistema es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v = (-1 + i)u \\ -2u - 2v = (-1 + i)v \end{cases}$$

Reescribimos:

$$\begin{cases} (1 - i)u + v = 0 \\ -2u - (1 + i)v = 0 \end{cases}$$

Dado que $(1 - i)(1 + i) = 2$, podemos concluir que la segunda fila es igual a la primera fila multiplicada por $-(1 + i)$. Por lo tanto, todo vector propio es de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -\{1 + i\}u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el subespacio vectores propios asociado a $\lambda_1 = -1 - i$.

Para eso, resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -(1 + i) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Es fácil observar que el sistema es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v = -(1 + i)u \\ -2u - 2v = -(1 + i)v \end{cases}$$

Reescribimos:

$$\begin{cases} (1 + i)u + v = 0 \\ -2u - (1 - i)v = 0 \end{cases}$$

Dado que $(1 - i)(1 + i) = 2$, podemos concluir que la segunda fila es igual a la primera fila multiplicada por $-(1 - i)$. Por lo tanto, todo vector propio es de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -\{1 + i\}u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

Las soluciones particulares son:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix} e^{-t} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ (-1 + i)(\cos(t) + i \sin(t)) \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ -(\cos(t) + \sin(t)) + i(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{-t-it} = \begin{pmatrix} \cos(t) - i \sin(t) \\ (-1-i)(\cos(t) - i \sin(t)) \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos(t) - i \sin(t) \\ -(\cos(t) + \sin(t)) - i(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix} e^{-t}$$

Notemos que

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -[\cos(t) + \sin(t)] \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_2(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2i} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

Toda solución se escribe como la combinación lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -[\cos(t) + \sin(t)] \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

Considerando las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 1$ se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y es fácil darse cuenta que $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$.

Solución de 3.3) Notemos que $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ y eso implica

$$-e^{-t} \leq \sin(t)e^{-t} \leq \sin(t)e^{-t}$$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(t)e^{-t} = 0.$$

Del mismo modo se deduce

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t)e^{-t} = 0.$$

y podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{u}_i(t) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Como toda solución del sistema es del tipo $c_1 \tilde{u}_1(t) + c_2 \tilde{u}_2(t)$, concluimos que toda solución converge a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.