PRUEBA I

MATEMÁTICAS IV (PRIMAVERA 2010)

1.- Resuelva las siguiente ecuación diferencial

$$y(2x^2 - xy + y^2)dx - x^2(2x - y)dy = 0$$

con la condición inicial $y(1) = 1/2$.

Definamos:

$$M(x, y) = y(2x^2 - xy + y^2) \quad \text{and} \quad N(x, y) = -x^2(2x - y)$$

y notemos que

$$M(tx, ty) = t^3 M(x, y) \quad N(tx, ty) = t^3 N(x, y).$$

Por lo tanto, la ecuación es homogénea.

Tras el cambio de variables $y = zx$, la ecuación se transforma en:

$$zx(2x^2 - x^2 z + z^2 x^2)dx - x^2(2x - zx)(xdz + zdx) = 0,$$

y despejando términos se tiene:

$$z^3 dx = x(2 - z)dz$$

la cual es una ecuación de variables separables.

Entonces:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(2 - z)dz}{z^3}.$$

Integramos

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(2 - z)dz}{z^3}$$

y se obtiene:

$$\ln(x) = c + 2\int z^{-3}\, dz - \int z^{-2}\, dz = c - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}.$$

Como $z = y/x$, se tiene que

$$\ln(x) = c - \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y}.$$

Entonces se obtiene una solución definida implicitamente:

$$y^2 \ln(x) = y^2 c - x^2 + xy$$

Reemplazamos $x = 1$ e $y = 1/2$:

$$0 = \frac{c}{4} - 1 + \frac{1}{2}$$

es decir $c = 2$ y tenemos la solución:

$$y^2 \ln(x) = 2y^2 - x^2 + xy$$

2.- Resuelva la ecuación diferencial:

$$y(8x-9y)dx+2x(x-3y)dy=0$$

Definamos:

$$M(x,y)=y(8x-9y) \quad \text{y} \quad N(x,y)=2x(x-3y).$$

Notemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=8x-18y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=4x-6y$$

y por lo tanto, observamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\neq\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

por lo que la ecuación diferencial **no** es exacta.

Sin embargo, notemos que

$$\frac{1}{N(x,y)}\Big(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\Big)=\frac{4x-12y}{2x(x-3y)}=\frac{2}{x}.$$

Por lo tanto, la ecuación tiene un factor integrante:

$$e^{\int 2/x\,dx}=x^2.$$

Multiplicamos la ecuación por x^2 y se obtiene:

$$(8x^3y-9x^2y^2)dx+(2x^4-6x^3y)dy=0.$$

Definamos:

$$\tilde{M}(x,y)=8x^3y-9x^2y^2 \quad \text{y} \quad \tilde{N}(x,y)=2x^4-6x^3y$$

y observemos que:

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}(x,y)=8x^3-18x^2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}(x,y)=8x^3-18x^2y$$

y la ecuación es exacta.

Por lo tanto, existe una función $f\colon\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=C$. Además:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x^3y-9x^2y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^4-6x^3y.$$

Entonces

$$\int\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx=\int 8x^3y-9x^2y^2\,dx.$$

Resolviendo las integrales, se tiene que:

$$f(x,y)=2x^4y-3x^3y^2+c(y).$$

Del mismo modo:

$$\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\int 2x^4-6x^3y\,dy.$$

Integrando ambas partes, se tiene:

$$f(x,y)=2x^4y-3x^3y^2+c(x).$$

Por lo tanto, $c(x)=c(y)=0$ y la solución de la ecuación es la función definida implícitamente:

$$f(x,y)=2x^4y-3x^3y^2=x^3y(2x-3y)=C.$$

Observación: la euación puede resolverse como ecuación homogénea

3.- Consideremos una taza de café hirviendo (100^{oc}) en una habitación con temperatura constante de 15^{oc}. Diez minutos más tarde, la temperatura del café es de 50^{oc}.

i) Cual es el coeficiente de transferencia térmica k de la taza de café?.

ii) Cual es la temperatura del café en 30 minutos?.

Ayuda: Utilice la ecuación que la pérdida de calor, la cual dice que la velocidad de decremiento de la temperatura de un cuerpo es inversamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura exterior. La constante de proporcionalidad viene dada por el coeficiente k.

Sea $T(t)$ la temperatura del café en el tiempo t. Sabemos que

$$T' = -k(T - T_{ext}), \quad \text{con} \quad T_{ext} = 15^{oC}.$$

Reescribimos la ecuación:

$$T' + kT = kT_{ext}.$$

Multiplicamos por e^{kt} y se obtiene:

$$T'e^{kt} + ke^{kt}T = ke^{kt}T_{ext},$$

lo cual es equivalente a:

$$(Te^{kt})' = ke^{kt}T_{ext}.$$

Integramos entre 0 y t:

$$T(t)e^{kt} - T(0) = \int_0^t ke^{ks}T_{ext}\,ds = T_{ext}\int_0^t ke^{ks}\,ds = T_{ext}\Big(e^{kt} - 1\Big).$$

Entonces se obtiene la solución de la ecuación:

$$T(t) = T(0)e^{-kt} + T_{ext}\Big(1 - e^{-kt}\Big). \tag{1}$$

Como a los 10 minutos, la temperatura del café es de 50^{oC}, entonces $T(10) = 50$, además $T(0) = 100$ y $T_{ext} = 15$, reemplazamos esos valores en (1):

$$50 = 100e^{-10k} + 15(1 - e^{-10k}) = 85e^{-10k} + 15,$$

entonces:

$$35 = 85e^{-10k},$$

lo cual es equivalente a

$$e^{10k} = \frac{85}{35} = \frac{17}{7}.$$

Luego, se tiene:

$$10k = \ln(17) - \ln(7)$$

y por lo tanto

$$k = \frac{\ln(17) - \ln(7)}{10}.$$

El resto del ejercicio se obtine reemplazando $T_{ext} = 15$,$k = \frac{\ln(17)-\ln(13)}{10}$, $T(0) = 100$ y $t = 30$ en (1).

4.- Resuelva la ecuación diferencial:

$$y' = -y + e^{-x}y^2, \quad \text{con} \quad y(0) = 1/2$$

y calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Esta ecuación es del tipo **Bernoulli**, por lo tanto realizamos el cambio de variable $y = 1/u$ y se obtiene:

$$y' = -\frac{u'}{u^2},$$

luego se tiene:

$$u' = -u^2\big(-y + e^{-x}y^2\big),$$

como $y = 1/u$, se tiene

$$u' = u^2\big(1/u - e^{-x}/u^2\big)$$

y eso equivale a la ecuación lineal:

$$u' = u - e^{-x}.$$

Resolvemos la ecuación lineal:

$$u' - u = e^{-x},$$

multiplicamos por e^{-x}:

$$u'e^{x} - ue^{-x} = e^{-2x},$$

que es equivalente a:

$$\Big(u(x)e^{-x}\Big)' = e^{-2x}$$

ahora integramos:

$$u(x)e^{-x} = u(0) - \int_0^x e^{-2s}\,ds.$$

Como $y(0) = 1/2$, entonces $u(0) = 2$ y se obtiene:

$$u(x) = e^x\Big(2 + \frac{e^{-2x} - 1}{2}\Big) = 2e^x + \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{3e^x + e^{-x}}{2}.$$

Es fácil ver que e^x tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$. Como $y(x) = 1/u(x)$, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$