EJEMPLOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MATEMÁTICAS IV (PRIMAVERA 2010)

1. Conceptos básicos de demografía

Nos interesa describir el crecimiento de la población de una especie abstracta P. Para ello existen muchos métodos, pero en el curso utilizaremos una herramienta fundamental: las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea $P(t)$ el número de especies de la población P en el tiempo t. Sea $B(t)$ el número de nacimientos de especies P en el intervalo de tiempo $[0,t]$ y sea $D(t)$ el número de muertes de especies P en el intervalo de tiempo $[0,t]$.

Definición 1. *La **tasa de natalidad** de la población P en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ será definida por*

$$\frac{1}{P(t_1)}\frac{B(t_2)-B(t_1)}{t_2-t_1}. \tag{1.1}$$

Definición 2. *La **tasa de mortalidad** de la población P en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ será definida por*

$$\frac{1}{P(t_1)}\frac{D(t_2)-D(t_1)}{t_2-t_1}. \tag{1.2}$$

La tasa de crecimiento poblacional per cápita en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ vendrá dada por

$$\frac{1}{P(t_1)}\frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1} \tag{1.3}$$

Una hipótesis simplificativa del modelo es la ausencia de inmigración y emigración. Por lo tanto, la tasa de crecimiento per cápita de la poblacion P en un intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ vendrá dada exclusivamente por la diferencia de las tasas de natalidad y mortalidad:

$$\frac{1}{P(t_1)}\frac{P(t_2)-P(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{1}{P(t_1)}\frac{B(t_2)-B(t_1)}{t_2-t_1}-\Big(\frac{1}{P(t_1)}\frac{D(t_2)-D(t_1)}{t_2-t_1}\Big). \tag{1.4}$$

2. Modelo de Malthus

En *An Essay on the Principle of Population* (1798), el economista británico T. Malthus consideró los siguientes supuestos:

(M1) La tasa de mortalidad en el intervalo de tiempo $[t,t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)}\frac{D(t+h)-D(t)}{h}=d \tag{2.1}$$

Date: Julio 2010.

(M2) La tasa de natalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)} \frac{B(t+h) - B(t)}{h} = b \quad \text{con} \quad b > 0. \tag{2.2}$$

Entonces, la tasa de crecimiento per cápita de la población P en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ puede ser calculada mediante la ecuación (1.4), combinada con las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$\frac{1}{P(t)} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = b - d$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $P(t)$, se obtiene:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (b - d)P(t).$$

Luego, hacemos el paso al límite $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (b - d)P(t),$$

Aplicando la definición de derivada en la parte izquierda, se tiene la ecuación de Malthus

$$P'(t) = (b - d)P(t). \tag{2.3}$$

Es fácil notar que si la población inicial en $t = 0$ es P_0, entonces la ecuación (2.3) tiene como solución

$$P(t) = P_0 e^{(b-d)t}. \tag{2.4}$$

Además, notemos que:

- Si $b = d$, entonces $P(t) = P_0$ para todo $t \geq 0$.
- Si $b < d$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0$.
- Si $b > d$, entonces $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$.

Una de las consecuencias del modelo malthusiano es que si la tasa de natalidad es menor a la tasa de mortalidad se tiene un decreciemiento exponencial (y una eventual extinción) de la población. Por otro lado, si la tasa de natalidad es mayor a la población se tiene un crecimiento exponencial de la población. Esta última situación se la llamo *catástrofe malthusiana* y marcó profundamente el panorama científico e intelectual de la primera mitad del siglo XIX.

3. Modelo de Verhulst

El trabajo del demógrafo Belga F. Verhulst consideró los siguientes supuestos:

(V1) La tasa de mortalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)} \frac{D(t+h) - D(t)}{h} = d. \tag{3.1}$$

(V2) La tasa de natalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)} \frac{B(t+h) - B(t)}{h} = b_0 - b_1 P(t), \quad \text{con} \quad b_0, b_1 > 0. \tag{3.2}$$

Notemos que el gráfico $Y(P)$ versus P, donde $Y(P)$ es la parte derecha de la ecuación (3.2) y describe una recta que toma valores positivos en el intervalo $(0, b_0/b_1)$. Es decir, la natalidad es inversamente proporcional al tamanio de la población.

Entonces, la tasa de crecimiento per cápita de la población P en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ puede ser calculada mediante la ecuación (1.4), combinada con las ecuaciones (3.2) y (3.1):

$$\frac{1}{P(t)} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = b_0 - d - b_1 P(t).$$

Si multiplicamos ambas ecuaciones por $P(t)$, se obtiene:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\}.$$

Luego, hacemos el paso al límite $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\},$$

Aplicando la definición de derivada en la parte izquierda, se tiene la ecuación logística de Verhulst:

$$P'(t) = P(t)\Big\{b_0 - d - b_1 P(t)\Big\}. \tag{3.3}$$

Usando los cambios de variable

$$r = b_0 - d > 0 \quad \text{y} \quad K = \frac{b_0 - d}{b_1},$$

la ecuación logística de Verhulst (3.3) puede reescribirse como:

$$P'(t) = rP(t)\Big\{1 - \frac{P(t)}{K}\Big\} \tag{3.4}$$

la cual es ampliamente conocida en la literatura matemática y ecológica.

De ahora en adelante, con el fin de simplificar la notación reescribiremos (3.4) de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = rP\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\} \tag{3.5}$$

La ecuación (3.5) es una **Ecuación Diferencial**, pues es una ecuación cuya incógnita es una función $P(t)$ y su derivada $P'(t)$.

4. Resolución de la ecuación logística de Verhulst

Recordemos que la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = rP\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\},$$

puede reescribirse como:

$$\frac{dP}{P\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\}} = r dt. \tag{4.1}$$

La idea es integrar esta última igualdad y obtener:

$$\int \frac{1}{P\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\}}\, dP = \int r\, dt. \tag{4.2}$$

Por el método de fracciones parciales, es fácil ver

$$\frac{1}{P\left\{1-\frac{P}{K}\right\}} = \frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \tag{4.3}$$

y luego reemplazamos (4.3) en la izquierda de (4.2) e integramos la derecha de (4.2) obteniendo:

$$\int \frac{1}{P}\,dP + \int \frac{1}{K-P}\,dP = rt + C_0,$$

lo cual equivale a:

$$\ln(P) - \ln(K-P) = \ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C_0. \tag{4.4}$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de (4.4) se obtiene:

$$\frac{P}{K-P} = C_1 e^{rt} \quad \text{con} \quad C_1 = e^{C_0}. \tag{4.5}$$

Tras multiplicar cruzado, es fácil deducir que

$$P = \frac{KC_1e^{rt}}{1+C_1e^{rt}}$$

notemos que P depende de t, por lo tanto escribimos

$$P(t) = \frac{KC_1e^{rt}}{1+C_1e^{rt}}. \tag{4.6}$$

El valor de C_1 es desconocido. Sin embargo, notemos que si conocemos el valor de la población P en el tiempo $t=0$, se tiene que

$$P(0) = \frac{KC_1}{1+C_1}$$

y multiplicando cruzado se obtiene

$$C_1 = \frac{P(0)}{K-P(0)} \quad \text{cuando} \quad P(0) \neq K. \tag{4.7}$$

Finalmente, reemplazando (4.7) en (4.6), se tiene que si la población P, en tiempo $t=0$ es de $P(0)$, entonces la población en el tiempo $t>0$ vendrá dada por:

$$P(t) = \frac{KP(0)e^{rt}}{1+P(0)[e^{rt}-1]}. \tag{4.8}$$

Usando la regla de L'Hôpital, es fácil observar que si $P(0) \neq K$ entonces:

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{KP(0)e^{rt}}{1+P(0)[e^{rt}-1]} = K.$$

Es decir, según el modelo de Verhulst, la población (sin importar su valor inicial) converge a K. Por otro lado, es fácil deducir a partir de (4.8) que toda solución de (3.5) con condición inicial $P(0) \in (0,K)$ es creciente y toda solución de (3.5) con condición inicial $P(0) > K$ es decreciente.

Remark 1. Notemos que (4.6) es una **solución general** de la ecuación logística de Verhulst porque si la derivamos con respecto a t podremos comprobar que satisface (3.5). Por otro lado, la ecuación (4.8) es una **solución particular** de la ecuación logística de Verhulst pues satisface (3.5) para una determinada condición inicial $P(0)$.

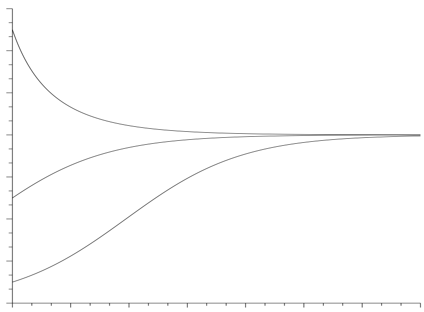

FIGURE 1. Solución numérica (Usando SCILAB) de la ecuación logistica de Verhulst con valores $r = 0.5$ y $K = 4$. Observe que no importando la condición inicial, las soluciones son convergentes a K cuando $t \to +\infty$.

El método empleado para resolver la ecuación logística (3.5) se conoce como método de varibles separables y se aplica a toda ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dP}{dt} = f(P)g(t) \tag{4.9}$$

donde se obtiene

$$\frac{dP}{f(P)} = g(t)dt$$

y luego se integra

$$\int \frac{1}{f(P)}\, dP = \int g(t)\, dt + C$$

5. Propiedades cualitativas de las soluciones

Muchas veces, se pueden conocer propiedades de las soluciones si tener que resolver la ecuación. A continuación veremos que las soluciones de (3.5) tienen las siguientes propiedades:

i) Si $P(0) > 0$, entonces $P(t) > 0$ (si en el tiempo $t = 0$ hay población entonces en el tiempo $t > 0$ hay población): En efecto, notemos que

$$\frac{dP}{P} = r\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\},$$

lo cual equivale a:

$$\ln(P(t)) - \ln(P(0)) = r\int_0^t \Big\{1 - \frac{P(r)}{K}\Big\}\, dr$$

y puede reescribirse como:

$$P(t) = P(0)\exp\left(\int_0^t \Big\{1 - \frac{P(r)}{K}\Big\}\, dr\right) > 0. \tag{5.1}$$

porque la función exponencial siempre toma valores no negativos.

ii) Si $P(0) = K$, entonces $P(t) = K$ para todo $t \geq 0$. Notemos que si $P(0) = 0$, entonces

$$P'(0) = rP(0)\Big\{1 - \frac{K}{K}\Big\} = 0.$$

Como $P'(0) = 0$, entonces se tiene que una población de tamaño K no crece ni decrece. Es decir K es un equilibrio poblacional.

6. Efecto Allee

El biólogo W.C. Allee consideró [1] modelos de poblaciones cuyo crecimiento satisface las hipotesis siguientes

(A1) La tasa de mortalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)}\frac{D(t+h) - D(t)}{h} = \frac{d}{c}\{c + qP(t)\}, \quad d, c, q > 0 \tag{6.1}$$

(A2) La tasa de natalidad en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ satisface la propiedad

$$\frac{1}{P(t)}\frac{B(t+h) - B(t)}{h} = \frac{b_0 - b_1P(t)}{c}\{c + qP\}, \quad \text{con} \quad b_0, b_1, c, q > 0. \tag{6.2}$$

Notemos que el gráfico $Y(P)$ versus P, donde $Y(P)$ es la parte derecha de la ecuación (6.2) y describe una parabola que toma valores positivos en el intervalo $(0, b_0/b_1)$. Notemos además que si $q = 0$, se tienen las mismas hipotesis que la ecuación logística. Sin embargo el coeficiente $q > 0$ indica que existe un valor crítico de la población $P^* \in (0, b_0/b_1)$, tal que la tasa de natalidad aumenta cuando $P(t) < P^*$ y la tasa de natalidad decrece cuando $P(t) > P^*$. Cual es el valor de P^*.

Con un razonamiento similar al de la sección 3, se puede deducir que el crecimiento una población que satiface las hipótesis **(A1)**–(A2)} está descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\}\Big\{p + qP(t)\Big\} \tag{6.3}$$

con

$$r = \frac{b_0 - d_0}{c}, \quad K = \frac{b_1 c}{b_0 - d}, \quad p = \frac{h_0}{b_0 - d - 0}.$$

Queda propuesto como ejercicio el resolver la ecuación (6.3) por el método de separación de variables y demostrar que toda solución con condición inicial $P(0) > 0$ satisface

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = K.$$

References

[1] W.C. Allee. *Animal Aggregations: a Study in General Sociology.* Chicago University Press, 1933.
[2] F. Brauer y Carlos Castillo–Chavez. Matheamtical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer, 2001.
[3] N. Britton. *Essential Mathematical Biology.* Springer, 2003.
[4] J.D. Murray. *Mathematical Biology.* Springer, 1992.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Casilla 653, Santiago, Chile

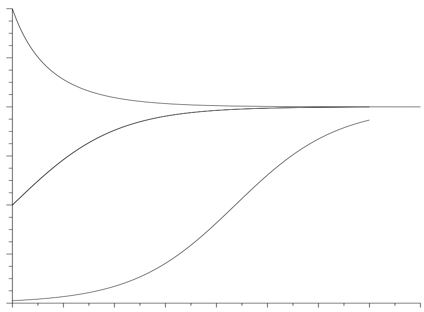

FIGURE 2. Solución numérica (Usando SCILAB) de la ecuación con efecto Allee con valores $r = 0.5$, $K = 4$,$c = 1$ y $q = 0.3$. Observe que no importando la condición inicial, las soluciones son convergentes a K cuando $t \to +\infty$.