GUÍA DE EJERCICIOS I

MATEMÁTICAS IV (PRIMAVERA 2010)

1.- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:
- i) $\frac{dy}{dx} = xy^3$.
- ii) $y\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$.
- iii) $y^3\frac{dy}{dx} = (y^4+1)\cos(x)$.
- iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2y^5}{x^2(2y^3-y)}$.
- v) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$.
- vi) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}\tan(y) = x$.
- vii) $\frac{dy}{dx} = 1+x+y+xy$.
- viii) $y' = 10^{xy}$.

2.- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:
- i) $(1+2y)dx - (4-x)dy = 0$.
- ii) $xydx + (1+x^2)dy = 0$.
- iii) $\cot(\theta)dr + rd\theta = 0$.
- iv) $xydy = (y+1)(1-x)dx$.

3.- Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$P' = Pf(P)$$

se conocen como ecuaciones de tipo Kolmogorov. Demuestre que si $P(0) > 0$, entonces $P(t) > 0$ para todo $t > 0$.

4.- Utilice el método de separación de variables:
- i) $x^5y' + y^5 = 0$.
- ii) $y' = 4xy$.
- iii) $y' + y\tan(x) = 0$.
- iv) $(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$.
- v) $y\ln(y)dx - xdy = 0$.
- vi) $xy' = (1-4x^2)\tan(y)$.
- vii) $y'\sin(y) = x^2$.
- viii) $y' - y\tan(x) = 0$.
- ix) $xyy' = y-1$.
- x) $xy^2 - y'x^2 = 0$.

5.- En el caso de cada una de las ecuaciones diferenciales, determine la solución particular que satisface la condición inicial dada:
- i) $y'y = x+1$, con $y(1) = 3$.
- ii) $(dy/dx)x^2 = y$, con $y(0) = 1$.
- iii) $\frac{y'}{1+x^2} = \frac{x}{y}$, con $y(1) = 3$.
- iv) $y^2y' = x+2$, con $y(0) = 4$.
- v) $y' = x^2y^2$, con $y(-1) = 2$.
- vi) $y'(1+y) = 1-x^2$, con $y(-1) = -2$.

6.- En el caso de la ecuación diferencial
$$\frac{y''}{y'} = x^2$$
realice la sustitución $y' = p$ para reducir el orden de la ecuación. Enseguida resuelva la acuación por el método de separación de variables. Ahora vuelva a sustituir y encuentre la solución y de la ecuación original.

7.- Una variación de la ecuación logística es
$$\frac{dP}{dt} = r(t)P\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\} \quad \text{con} \quad r(t) = \cos^2(t)$$
resuelva la ecuación mediante el método de separación de variables y estudie el límite de la solución general cuando $t \to +\infty$.

8.- Usando el método de separación de variables, resulva la ecuación logística con efecto Allee:
$$\frac{dP}{dt} = rP\Big\{1 - \frac{P}{K}\Big\}\Big\{p + qP(t)\Big\}$$
y calcule el límite de las soluciones cuando $t \to +\infty$.

9.- Determine cuál de las siguientes ecuaciones es exacta. Resuelva las que sean exactas:
- i) $(x + \frac{2}{y})dy + ydx = 0.$
- ii) $(\sin(x)\tan(y) + 1)dx + \cos(x)\sec^2(y)dy = 0.$
- iii) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$
- iv) $(2y^2 - 4x + 5)dx = (4 - 2y + 4xy)dy.$
- v) $(y + y\cos(xy))dx + (x + x\cos(xy))dy = 0.$
- vi) $(\cos(x)\cos^2(y))dx + 2\sin(x)\sin(y)\cos(y)dy = 0.$
- vii) $(\sin(x)\sin(y) - xe^y)dy = (e^y + \cos(x)\cos(y))dx.$
- viii) $(2xy^3 + y\cos(x))dx + (3x^2y^2 + \sin(x))dy = 0.$
- ix) $2x(1 + \sqrt{1 - x^2})dx = \sqrt{x^2 - y}dy.$
- x) $(x\ln(y) + yx)dx + (y\ln(x) + xy)dy = 0.$

10.- En el caso de cada una de las siguientes ecuaciones, determine el valor de n para el que la ecuación es exacta. Enseguida resuelva la ecuación para dicho valor de n.
- i) $(xy^2 + nx^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0.$
- ii) $(x + ye^{2xy})dx + nxe^{2xy}dy = 0.$

11.- Resuelva
$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}dy = 0$$
como ecuación exacta.