Novena Guía de Ejercicios

Matemáticas II. Semestre Primavera 2010

1. Describa con un dibujo los siguiente conjuntos:

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 2 - i| = 2\}$.

   b) $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 \leq |z| \leq 2\}$.

   c) $C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) + Im(z) = 5\}$.

   d) $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \frac{1}{10} \leq |z| \leq 4, \ Im(z) \geq 0\}$.

2. Escriba en la forma $a + bi$ los siguientes números complejos.

   a) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$. b) $\frac{-1-i}{\sqrt{3}-i}$. *c)* $\frac{-3-\sqrt{3}i}{1-i}$. d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+2i}$.

3. Calcule el módulo de los siguientes complejos:

   a) $\frac{-1+5i}{\sqrt{3}+7i}$. b) $\frac{-\sqrt{2}-i}{\sqrt{3}-4i}$. *c)* $\frac{(-3-\sqrt{3}i)}{1-i} \cdot (4 + 9i)$. d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+2i} \cdot \frac{-11+18i}{\sqrt{3}+5i}$.

4. Describa con un dibujo los siguiente conjuntos:

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 5 - 2i| = 3\}$.

   b) $B = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 \leq |z - 3| \leq 2\}$.

5. Escriba en la forma trigonómetrica o polar los siguientes números complejos: a) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$. b) $\frac{-1-i}{\sqrt{3}-i}$. *c)* $(-\sqrt{3} - i)(1 - i)$

6. Utilize la fórmula de De Moivre para calcular la potencia indicada. Expresar el resultado en coordenadas cartesianas.

   a) $(1 + i)^5$ *b)* $(2 + 2i)^6$ *c)* $(-1 + i)^{10}$ *d)* $(1 - i)^{12}$ *e)* $2(\sqrt{3} + i)^7$

   f) $4(1-\sqrt{3}i)^3$ *g)* $\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{10}$ *h)* $\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]^8$.

7. Encuentre el cuociente y el resto de la división de los polinomios $h(x)$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

   a) $h(x) = x^4 + 2x^3 + 3x - 5$. $p(x) = 3x^3 + 5x^2 + 4x + 11$

   b) $h(x) = 2x^5 + 6x^4 + 3x^2 - 1$. $p(x) = 4x^2 + +5x - 1$.

8. Encuentre el valor de m para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga resto 12 al dividirlo por $x + 12$.

9. Explique por que no existe un polinomio de grado 3 que tenga coeficientes reales y raíces $1, 2, i$.

10. a) Encuentre un polinomio de grado 3 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(0) = 2, \;\; p(1) = 0 \;\; p(-i) = 0$.

    b) Sabiendo que $1+2i$ es raíz de $p(x) = x^3+2x^2-3x+20$ encuentre todas las otras raíces.

11. Sean $p(x) \in \; \mathbb{R}[x], \; z \in \mathbb{C}, \; p(z) = 0$. Verifique que el conjugado de z es también raíz de $p(x)$. Es decir pruebe que $p(\overline{z}) \; = \; 0$.

12. Encuentre un polinomio con coeficientes reales de grado 4 que tenga $1 + i$ como raíz de multiplicidad 2.

13. Determine el polinomio $ax^2 + bx + c$ sabiendo que es divisible por $x + 2$ y que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 1$ y por $x + 3$ sean iguales.

14. *Criterio para raíces racionales (usar sin demostración):* Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \; \in \; \mathbb{Z}[x], \; a_n \neq 0$. Si un número racional $\frac{p}{q}$ es raíz de $p(x)$ entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. *Regla de los signos de Descartes (usar sin demostración).* Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \; \in \; R[x]$ (potencias descendentes de x) Entonces

    i) el número de raíces positivas de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signo de $p(x)$ o es este número disminuido en un entero par.

    ii) El número de raíces negativas de $p(x)$ es igual al número de variaciones de signo de $p(-x)$ o es este número disminuido en un entero par.

    iii) Encuentre, si las hay todas las raíces racionales de a) $p(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$, b) $q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x$.