Índice

1. DERIVADAS **3**

1.1. Operatoria de derivadas 4

2. Aplicaciones de la derivada **6**

2.1. Funciones crecientes y decrecientes 7

2.2. Máximos y mínimos de funciones 7

2.3. Trazado de curvas y asíntotas verticales y horizontales 10

2.4. Regla de L'Hôpital 10

3. Cónicas **12**

4. Primitivas e integración indefinida **17**

4.1. Métodos básicos de integración. 18

5. Sumas de Riemann e integral definida. **20**

5.1. Sumas de Riemann 20

5.2. Integral definida 22

5.3. Evaluación de integrales 24

5.4. Valor promedio y TFC 2^a parte. 27

5.5. Función Logaritmo Natural 28

5.6. Funciones inversas, existencia, continuidad y derivada 29

5.7. Función Exponencial 30

5.8. Integrales Impropias 36

6. Sucesiones y Series infinitas de números reales **37**

6.1. Sucesiones 37

6.2. Series 40

7. Números Complejos **45**

7.1. Forma polar o trigonométrica de un número complejo: 47

7.2. Potencias de números complejos. 48

8. Polinomios **48**

9. Funciones Trigonométricas Inversas **53**

10. Fracciones racionales y descomposición en fracciones parciales **56**

11. Series de potencias y serie de Taylor **58**

11.1. Series de potencias 58

11.2. Series de Taylor y de Maclaurin 60

MATEMATICA II

SEGUNDO SEMESTRE 2010

1. DERIVADAS

Dados $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$ se quiere la mejor aproximación al gráfico de f en c por una recta.

Para conocer dicha recta basta conocer su pendiente m_c ya que tal recta contiene al punto de tangencia $\big(c, f(c)\big)$.

Para $0 \neq h$ pequeño se considera la recta que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y por $(c + h, f(c + h))$. La pendiente de tal recta es

$$m_{c,h} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

La pendiente que se quiere m_c se aproxima por las pendientes $m_{c,h}$ cuando $h \to 0$. Así, $m_c = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

Definición 1.1. La derivada de una función *f es una función f' definida por $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para todo x donde exista este límite.*

Observación 1.1. *Note que si f no está definida a un lado del punto x, en la definición de derivada es válido considerar el límite lateral que esté bien definido.*

Observación 1.2. *Forma alternativa de la derivada (cambio de varaible): Sea $y = x + h$, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Entonces, $f'(x) = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.*

Se dice que f es derivable en c o diferenciable en c si existe $f'(c)$.

Proposición 1.1. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Si f es diferenciable en c entonces f es continua en c.*

Demostración: Como f es diferenciable en c, existe $f'(c)$ y se tiene $f'(c) = \lim\limits_{y\to c} \dfrac{f(y) - f(c)}{y - c}$. Por otro lado f continua en $c \iff \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) \iff$

$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=0$. Ahora bien, $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ \lim_{x\to c}(x-c)=f'(c)\lim_{x\to c}(x-c)=0$.

Observación 1.3. *En particular si la función f es diferenciable en un intervalo (a,b) entonces f es continua en (a,b).*

Encuentre un contraejemplo para ver que hay funciones continuas en c que no son diferenciables en c.

Ejercicio 1.1. *Sea $c\in\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to c$ función constante. Entonces $\forall\ \ x\in(a,b)\ \ f'(x)=0$.*

Ejercicio 1.2. *Sea $n\in\mathbb{N},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to x^n$ función entonces $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \ f'(x)=nx^{n-1}$.*

Ejemplo 1.1. *$\forall\ x\in\mathbb{R}\ sen'(x)=cos(x),\ \wedge\ cos'(x)=-sen(x)$.*

Solución: $sen'(x)=\lim_{h\to0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=$
$=\lim_{h\to0}\frac{sen(x)cos(h)+cos(x)sen(h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{cos(x)sen(h)-sen(x)[1-cos(h)]}{h}=$
$\lim_{h\to0}[cos(x)\frac{sen(h)}{h}-sen(x)\frac{1-cos(h)}{h}]=cos(x)\ \lim_{h\to0}\frac{sen(h)}{h}-sen(x)\ \lim_{h\to0}\frac{1-cos(h)}{h}=$
$cos(x)\cdot1-sen(x)\cdot0=cos(x)$.

En forma similar se prueba que $\forall\ x\in\mathbb{R}\ cos'(x)=-sen(x)$.

1.1. Operatoria de derivadas

Observación 1.4. *Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}, g:(a,b)\to\mathbb{R}$, funciones diferenciables en $c\in(a,b)$. Entonces*

1. $(\lambda f(c))'=\lambda(f'(c))$.
2. $(f\pm g)'(c)=f'(c)\pm g'(c)$.
3. $(fg)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$, $g(c) \neq 0$.

Ejemplo 1.2. *Pruebe que* $tan'(x) = sec^2(x)$.

Solución: $tan'(x) = (\frac{sen(x)}{cos(x)})' = \frac{sen'(x)cos(x) - sen(x)cos'(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos(x)cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$.

Proposición 1.2 (Derivada de la función compuesta o regla de la cadena.)**.** *Sean* $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* $f(I) \subseteq J$ *y sea* $c \in I$. *Si* f *es diferenciable en* c *y* g *es diferenciable en* $f(c)$ *entonces* $g \circ f$ *es diferenciable en* c *y* $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$.

Demostración: $(g \circ f)'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{(g \circ f)(c+h) - (g \circ f)(c)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{f(c+h) - f(c)} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{f(c+h) - f(c)} \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{y\to f(c)} \frac{g(y) - (g(f(c))}{y - f(c)} f'(c)$

$= g'(f(c))f'(c)$, $y = f(c+h)$

Ejemplo 1.3. *1. Sea* $n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Sea $n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ *entonces* $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

Solución: 1.- Ya sabemos que $\forall \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $((x^n)' = nx^{n-1})$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$. Tenemos que $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{-1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$. Luego, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

2.- Probemos que $\forall \quad n \in \mathbb{N}$ $((x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}n)$. Sea $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ y $h(x) = x^n$. Entonces, $(h \circ g)(x) = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$, luego $(h \circ g)'(x) = x' = 1$, es decir, $h'(g(x))g'(x) = 1$. Pero $h'(u) = nu^{n-1}$, luego $h'(g(x))g'(x) = 1$ implica que $n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}g'(x) = 1$, o sea, $1 = nx^{1-\frac{1}{n}}g'(x)$, de donde $g'(x) = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ Luego, $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

3.- Sea $f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^m$. Luego, $f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(x^{\frac{1}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. Luego, $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

Ejemplo 1.4. *Encuentre a)*$[(5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}})^{10}]'$, *b)* $[5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}]'$ *c)* $[cos^2(\sqrt{x}+5x^4)]'$.

Solución: a) Sea $f(x) = (5x + (3x - 1)^{\frac{4}{3}})^{10}$, entonces $f'(x) = 10[5x + (3x - 1)^{\frac{4}{3}}]^9(5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}})' = 10[5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}}]^9[5+\frac{4}{3}(3x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot 3 = 10[5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}}]^9[5+4(3x-1)^{\frac{1}{3}}$.

b) Sea $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$, entonces $f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{-1}{3}}(2-x) = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$.

c) Sea $f(x) = cos^2(\sqrt{x}+5x^4)$, entonces $f'(x) = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(cos(\sqrt{x}+5x^4))' = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(-sen(\sqrt{x}+5x^4))(\sqrt{x}+5x^4)' = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(-sen(\sqrt{x}+5x^4))(\frac{1}{2\sqrt{x}}+20x^3)$.

2. Aplicaciones de la derivada

Teorema del Valor Medio. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el abierto (a, b). Entonces, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Note que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El teorema establece que hay una recta tangente en el segmento de curva que tiene la misma pendiente de la recta anterior.

Aplicaciones del Teorema del Valor Medio.

1.) Si $\forall x \in [a, b]$ $(f'(x) = 0)$ entonces f es constante en $[a, b]$.

En efecto, apliquemos Teorema del Valor Medio al intervalo $[a, x]$ para cualquier x en $\mathbb{R}$ tal que $a < x \leq b$. Como f es continua en $[a, x]$ y diferenciable en (a, x), debe existir $c \in [a, x]$ tal que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pero $f'(c) = 0$, por lo cual $\forall x \in (a, b]$ $(f(x) = f(a))$. Además $f(a) = f(a)$. Luego, $\forall\, x \in [a, b]$ $(f(y) = f(a))$.

2.) Sean f, g funciones tales que $\forall\, x \in [a, b]$ $f'(x) = g'(x)$. Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in [a, b]$ $(f(x) = g(x)+k)$. Para probar esto, aplique lo anterior a $h := f-g$.

2.1. Funciones crecientes y decrecientes

f se dice **creciente en el intervalo** I si

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ (x_1 \ < \ x_2 \rightarrow f(x_1) \ < \ f(x_2))$$

f se dice **decreciente en el intervalo** I si

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ (x_1 \ < \ x_2 \rightarrow f(x_1) \ > \ f(x_2))$$

Proposición 2.1. Criterio para funciones crecientes o decrecientes.

a) Si $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) \ > 0)$, *entonces* f *es creciente en* $[a,b]$.

b) Si $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) \ < 0)$, *entonces* f *es decreciente en* $[a,b]$.

Dem. Supongamos que $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) \ > 0)$. Sean $u, v \in [a,b]$ tales que $u \ < \ v$. Por TVM aplicado a $[u,v]$, pues $[u,v] \subseteq [a,b]$ se tiene que hay $c \in (u,v)$ tal que $f'(c) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. Como $u < v$ y $f'(c) > 0$, se tiene que $f(v) - f(u) > 0$, o sea $f(u) < f(v)$ que es lo que se quería probar. En forma similar se procede para probar que $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) \ < 0)$ implica que f es decreciente en $[a,b]$.

2.2. Máximos y mínimos de funciones

Definición 2.1 (Extremos relativos o locales de una función)**.** *Sea* f *función y sea* c *punto interior de* $dom(f)$.

1. $f(c)$ **es un mínimo local de** f *ssi existe intervalo abierto* I *con* $c \in I \subseteq dom(f)$ *tal que* $f(c) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

2. $f(c)$ **es un máximo local de** f *ssi existe intervalo abierto* I *con* $c \in I \subseteq dom(f)$ *tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Proposición 2.2. *Si* $f(c)$ *es un máximo local o un mínimo local de* f*, entonces* $f'(c) = 0$ *o* $f'(c)$ *no existe.*

En efecto, la función valor absoluto tiene un mínimo local en 0, pero no es diferenciable en 0, por lo que el caso en que $f^{'}(c)$ no existe es posible para lo afirmado. Por otra parte, si f es diferenciable en c pero suponemos que $f^{'}(c) \neq 0$, entonces o bien $f^{'}(c) > 0$ o bien $f^{'}(c) < 0$.

Si $f'(c) > 0$, entonces $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. Es decir, hay intervalo (a, b) tal que $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ para todo $x \neq c$ en (a, b). Luego numerador y denominador deben tener igual signo, es decir,

$x < c$ y $f(x) < f(c)$. Luego $f(c)$ no es un mínimo en (a, b).

$x > c$ y $f(x) > f(c)$. Luego $f(c)$ no es un máximo en (a, b).

Luego $f(c)$ no es extremo si $f'(c) > 0$. En forma similar se prueba que $f'(c) < 0$ entonces $f(c)$ no es extremo. Luego la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Observación 2.1. *Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado entonces los máximos locales o los mínimos locales de f en I se encuentran entre los valores $f(a), f(b)$ o $f(c)$ con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.*

Punto crítico de f en I (abierto) es un punto $c \in dom(f)$ tal que i) $f'(c) = 0$ o ii) $f'(c)$ no existe

Si f tiene un extremo en c entonces c es un punto crítico de f.

Extremos globales o absolutos de una función: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ función con dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. Sea $c \in D$,

1.- $f(c)$ **es un mínimo global de** f si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$.

2.- $f(c)$ **es un máximo global de** f si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$.

Criterio de la primera derivada: Sea c un punto crítico de una función f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Si f es diferenciable en (a, b) excepto quizás en c, entonces:

1.- Si $\forall\ x \in (a, c)\ (f'(x) < 0)$ y $\forall\ x \in (c, b)\ (f'(x) > 0)$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.

2.- Si $\forall\ x \in (a,c)\ (f'(x) > 0)$ y $\forall\ x \in (c,b)\ (f'(x) < 0)$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.

3.- Si f' no cambia de signo en torno a c, $f(c)$ no es máximo ni mínimo.

Ejercicio 2.1. *Encuentre los intervalos de crecimiento y los extremos de la función* $f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$. *Dibuje.*

Observación 2.2. *Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto* $I \subseteq dom(f)$ *cuando para cada par de puntos de la gráfica* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$, *con* a *y* b *en* I, *el segmento que une ambos puntos está sobre la gráfica.*

Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto $I \subseteq dom(f)$ *cuando para cada par de puntos de la gráfica* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$, *con* a *y* b *en* I, *el segmento que une ambos puntos está bajo la gráfica.*

Observación 2.3. *Se dice que una función* f *tiene segunda derivada si* f' *es diferenciable.*

Proposición 2.3. *Sea* f *una función con segundas derivadas en un intervalo* I. *Entonces:*

1. f *es cóncava hacia arriba en* I *ssi* $\forall x \in I\,(f''(x) \geq 0)$
2. f *es cóncava hacia abajo en* I *ssi* $\forall x \in I\,(f''(x) \leq 0)$

Gracias a esa caracterización, obtenemos:

Criterio de la segunda derivada: Sea f función dos veces derivable en un intervalo abierto I, c un punto en I tal que $f'(c) = 0$. Entonces:

1.- Si $\forall\ x \in I\ (f''(x) > 0)$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f en I.

2.- Si $\forall\ x \in I\ (f''(x) < 0)$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de $f$en I.

Punto de inflexión de f es un punto $c \in dom(f)$ tal que f cambia de concavidad en torno a ese punto. En un punto de inflexión c de una función f con segundas derivadas en torno a c, se tiene que f'' cambia de signo en torno a c, tanto si $f''(c) = 0$ como si $f''(c)$ no existe

Ejercicio 2.2. *i) Haga un estudio completo de la curva* $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

ii) Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$

2.3. Trazado de curvas y asíntotas verticales y horizontales

Además de los criterios ya vistos para ayudar a graficar funciones veremos las asíntotas verticales y horizontales. Que son rectas que se aproximan progresiva e indefinidamente a la gráfica de la función f.

La recta de ecuación $x = c$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o si} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

La recta de ecuación $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad \text{o si} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 2.1. *Indique asíntotas verticales y horizontales, si las hay de la curva* $y = \frac{x}{x-8}$

La recta $x = 8$ es una asíntota vertical pues $\lim_{x\to 8} f(x) = \infty$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Ejercicio 2.3. *Haga un estudio completo incluidas asíntotas verticales y horizontales, si las hay, de la curva* $y = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$

2.4. Regla de L'Hôpital

Para el cálculo de algunos límites por ejemplo

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - tan(x)}{sen(x)}, \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{sen(x)}, \quad c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5}$$

que involucran funciones diferenciables hay una forma importante que se llama Regla de L'Hôpital, aplicable en algunos casos como los anteriores.

Regla de L'Hôpital: Sean f y g funciones reales diferenciables en un intervalo abierto I, salvo, tal vez, en un punto $c \in I$, Suponga también que $\forall\ x \in I,\ g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, y que $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$. Entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista.

Otra variante de la Regla de L'Hôpital: Sean f y g funciones reales tales que f y g son direnciables en un intervalo abierto de la forma $I = (c, \infty)$. Suponga también que $\forall\ x \in I,\ g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista.

Nota. La regla de L'Hôpital también se puede utilizar cuando

$$(\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty) \text{ y cuando } (\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty)$$

Ejemplo 2.2. *Para a) como* $\lim_{x\to 0} x - tan(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} sen(x) = 0$ *puedo usar L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to 0} \frac{x - tan(x)}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - tan(x))'}{(sen(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - sec^2(x)}{cos(x)} = 0.$

Para b) como $\lim_{x\to 0} x^2 + x = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} sen(x) = 0$ *puedo usar L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + x)'}{(sen(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + 1}{cos(x)} = 1.$

c) Como $\lim_{x\to\infty} 3x^3 + x^2 + 3 = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} x^4 + 6x^2 + 5 = \infty$ *podemos usar la regla de L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^3 + x^2 + 3)'}{(x^4 + 6x^2 + 5)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 + 2x}{4x^3 + 12x} = L$

Como $\lim_{x\to\infty} 9x^2 + 2x = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 12x = \infty$ *podemos usar nuevamente la regla de L'Hôpital y tenemos* $L = \lim_{x\to\infty} \frac{(9x^2 + 2x)'}{(4x^3 + 12x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{18x + 2}{12x^2 + 12} = M$

Finalmente como $\lim_{x\to\infty} 18x + 12 = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} 12x^2 + 12 = \infty$ *podemos usar otra vez la regla de L'Hôpital y queda* $M = \lim_{x\to\infty} \frac{(18x + 2)'}{(12x^2 + 12)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{18}{24x} = 0.$

Así después de usar 3 veces la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5} = 0.$$

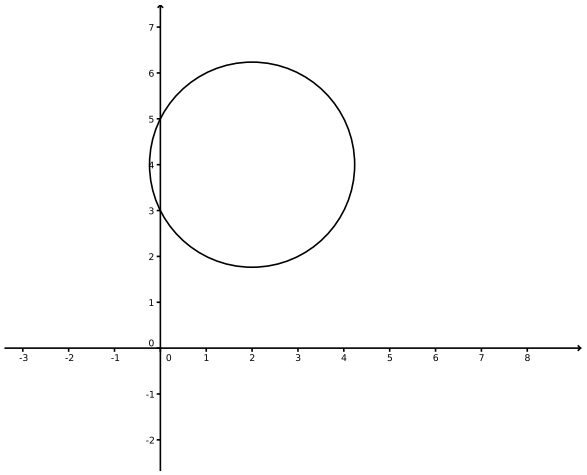
3. Cónicas

Se llaman cónicas a las curvas planas que se obtienen al interceptar un plano con un cono. Ellas son la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola En este curso veremos las ecuaciones de ellas.

Circunferencia: Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado centro.

La ecuación de una circunferencia de centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Ejemplo 3.1. *Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por* $(7, -5)$ *y el centro es el punto de intersección de las rectas* $7x - 9y - 10 = 0$ *y* $2x - 5y + 2 = 0$.

Solución: Sea $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia. Sabemos que $7h - 9y - 10 = 0$ y que $2h - 5k + 2 = 0$. Resolviendo el sistema obtenemos $h = 6, k = 2$ Luego tenemos $(x-6)^2 + (y-2)^2 = r^2$. Sabemos que $(7, -5)$ está en la circunferencia, luego $(7-6)^2 + (-5-2)^2 = r^2$. Por lo tanto $1 + 14 = r^2$, y la ecuaci'on de la circunferencia es $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 15$.

Ejercicio 3.1. *Encuentre el centro y radio de la circunferencia de ecuación* $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 15 = 0$. *Resp. Centro* $=(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ *y radio* $r = \sqrt{94/4}$

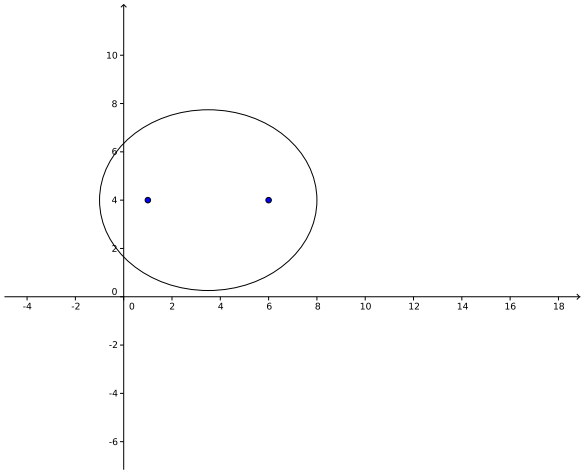
Ejercicio 3.2. *Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $(-8,3),(4,-5)$ *y su centro está sobre la recta de ecuación* $2x-3y-14=0$. *Resp.* $(x+8)^2+(y-10)^2=169$.

Elipse Se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante e igual a $2a$. El centro de la elipse se define como el punto medio del segmento de recta que une los focos.

i) La ecuación de una elipse de centro (h,k) y eje mayor paralelo al eje X, de longitud $2a$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b$$

Si c es la distancia del centro al foco entonces $c^2=a^2-b^2$. Los focos son $F_1=(h+c,k),\ F_2=(h-c,k)$ y los vértices $V_1=(h+a,k),\ V_2=(h-a,k)$.



ii) La ecuación de una elipse de centro (h,k) y eje mayor paralelo al eje Y, de longitud $2a$ es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b$$

$c^2=b^2-a^2$. Los focos son $F_1=(h,k+c),\ F_2=(h,k-c)$ y los vértices $V_1=(h,k+a),\ V_2=(h,k-a)$.

Ejemplo 3.2. *Encuentre centro, focos y vértices de la elipse de ecuación* $3x^2+5y^2-12x+30y+42=0$.

Solución: Tenemos $3(x^2-4x)+5(y^2+6y) = -42$. Completando cuadrados queda $3[(x-2)^2-4]+5[(y+3)^2-9] = -42$, luego queda $3(x-2)^2+5(y+3)^2 = 15$, de donde la ecuación de la elipse es $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{3} = 1$.

Es una elipse de eje mayor horizontal de centro $(2,-3)$, $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$. Luego $c = \sqrt{2}$, focos $(h \pm c, k) = (2 \pm \sqrt{2}, -3))$ y vértices $(h \pm a, k) = (2 \pm \sqrt{5}, -3)$.

Ejercicio 3.3. *Encuentre centro, focos y vértices de la elipse de ecuación* $9x^2+4y^2+36x-24y+36 = 0$. *Resp. Centro* $(-2,3)$, *focos* $(-2, 3 \pm \sqrt{5})$ *y vértices* $(-2,6)$ *y* $(-2,0)$.

Ejercicio 3.4. *Encuentre la ecuación de la elipse de centro* $(0,0)$ *foco* $(2,0)$ *y vértice* $(3,0)$ *Resp.* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$.

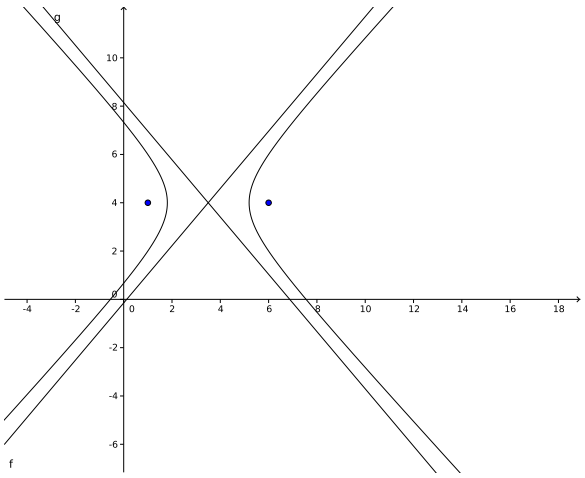
Hipérbola Se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

i) La ecuación de una hipérbola de centro (h,k) y eje transversal horizontal paralelo al eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si c es la distancia del centro al foco entonces $b^2 = c^2-a^2$. Los focos son $F_1 = (h+c,k)$, $F_2 = (h-c,k)$ y los vértices $V_1 = (h+a,k)$, $V_2 = (h-a,k)$.

La ecuaciones de las asíntotas son $y-k = \frac{b}{a}(x-h)$ e $y-k = -\frac{b}{a}(x-h)$



ii) La ecuación de una hipérbola de centro (h,k) y eje transversal vertical o paralelo al eje Y es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

$c^2=b^2-a^2$. Los focos son $F_1=(h,k+c),\ F_2=(h,k-c)$ y los vértices $V_1=(h,k+a),\ V_2=(h,k-a)$.

La ecuaciones de las asíntotas son $y-k=\frac{a}{b}(x-h)$ e $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$

Ejemplo 3.3. *Determine la gráfica de ecuación* $9x^2-4y^2-36x+8y=4$.

Solución: Completando cuadrados se llega a $9(x-2)^2-4(y-1)^2=36$, luego se tiene la ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

Luego la gráfica es una hipérbola de centro $(2,1)$ y eje principal paralelo al eje X. Como $a=2, b=3$ se tiene que $c=\sqrt{13}$. Luego los vértices son $(0,1)$ y $(4,1)$ y sus focos $(2+\sqrt{13},1)$ y $(2-\sqrt{13},1)$. Sus asíntotas son las rectas

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2),\ y-1=-\frac{3}{2}(x-2)$$

Ejercicio 3.5. *Encuentre la ecuación de la hipérbola de vértices* $(0,2)$ *y* $(6,2)$ *y asíntotas de ecuaciones* $y=\frac{2}{3}x$ *e* $y=4-\frac{2}{3}x$. *Resp.* $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$.

Parábola Se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice y la recta que pasa por el foco y el vértice se llama eje de la parábola.

i) La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje vertical es

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

directriz, la recta de ecuación: $y=k-p$ y foco $(h,k+p)$.

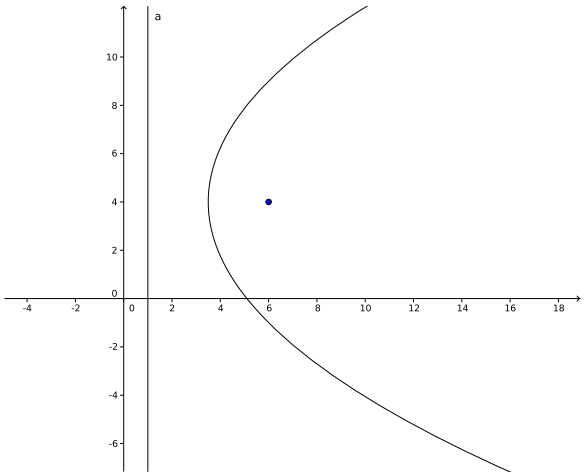
Si $p>0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

ii) La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje horizontal es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

directriz, la recta de ecuación: $x = h - p$ y foco $(h + p, k)$.

Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha y si $p < o$, la parábola se abre hacia la izquierda.



Ejercicio 3.6. *Encuentre el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola de ecuación* $4x + 2y^2 + 8 = 0$. *Resp.* $F = (-\frac{5}{2}, 0)$ *Directriz* $x = -\frac{5}{2}$.

Ejemplo 3.4. *Encuentre el foco de la parábola de ecuación* $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Solución: Se tiene que $2y = -x^2 - 2x + 1$ o bien $x^2 + 2x = -2y + 1$. Luego, completando cuadrados se tiene

$(x+1)^2 - 1 = -2y + 1$, es decir $(x+1)^2 = -2(y-1)$. Por lo tanto se trata de una parábola de eje vertical con vértice $(h, k) = (-1, 1)$, $p = -\frac{1}{2} < 0$ luego la parábola se abre hacia abajo. Foco $= (h, k + p) = (-1, \frac{1}{2})$.

Ejercicio 3.7. *Encuentre la ecuación de la parábola de eje vertical, que pasa por los puntos* $(0, 3), (3, 4)$ *y* $(3, -3)$. *Resp.* $5x^2 - 14x - 3y + 9 = 0$.

4. Primitivas e integración indefinida

Suponga que se pide encontrar una función f tal que $f'(x) = 5x^4$. Entonces $f(x) = x^5$, es una tal función, pero también lo son $f(x) = x^5 + k$, para cada $k \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1. *Se dice que una función F* **es una primitiva (o una antiderivada) de una función** *f, si para cada x en el dominio de f se tiene que $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 4.1. *Sea F una primitiva de f en un intervalo I, entonces G es una primitiva de f en I si y solo si $G(x) = F(x) + k \ \ \forall\ x \in I$, donde $k \in \mathbb{R}$, es una constante.*

Notación para primitivas: Si $y = F(x)$ es una primitiva de f entonces se dice que $F(x)$ es una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

La operación de encontrar todas las soluciones de esta ecuación se denomina integración y se denota por el símbolo $\int$

La notación $\int f(x)dx = F(x) + k$ donde k es una constante arbitraria, significa que F es una primitiva de f, esto es $F'(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f. Con esto tenemos

$$\int F'(x)dx = \{\ F(x) + k\ /\ k \in \mathbb{R}\ \}$$

Usaremos la notación

$$\int F'(x)dx = F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

teniendo presente que se trata de un conjunto de soluciones. **No hay que olvidar la constante** k.

Con esto y el conocimiento de derivadas se tiene que

1. $\int cos(x)dx = sen(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$
2. $\int sen(x)dx = -cos(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$
3. $\int sec^2(x)dx = tan(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$
4. $\int 0dx = k,\ k \in \mathbb{R}.$

5. $\int \alpha dx = \alpha x + k,\ k \in \mathbb{R}.$

6. $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + k,\ k \in \mathbb{R},\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, t \neq -1.$

7. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

8. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Observación 4.1. *La expresión* $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + k,\ k \in \mathbb{R},$ *es válida para todo* $t \in \mathbb{R}, t \neq -1$. *En el caso* $t = -1$ *se pone* $\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|)+k, k \in \mathbb{R} = ln|x|+k, k \in \mathbb{R}$ *y se lee logarimo natural de valor absoluto de* x. *Más adelante veremos la función logaritmo natural y sus propiedades.*

Ejercicio 4.1. *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

$a) \int [\frac{2}{\sqrt{x}} + sen(x)]dx,\ \ b) \int [x^{\frac{2}{5}} + sec^2(x)]dx,\ \ c)\ \ \int sen^2(x)dx,\ \ d)\ \int cos^2(x)dx.$

Sugerencia: $2sen^2(x) = 1 - cos(2x),\ \ 2cos^2(x) = 1 + cos(2x)$

4.1. Métodos básicos de integración.

1. **Por Partes** Se basa en la derivada de un producto de funciones.

   $\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$

   Ejemplo 4.1. *Calcule* $\int xsen(x)dx$

   Solución: Sea $u = x, dv = sen(x)dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -cos(x)$. Luego $\int xsen(x)dx = -xcos(x) + \int cos(x)dx = -xcos(x) + sen(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

   Ejercicio 4.2. *Calcule* $\int x^2 sen(x)dx$

   Ejercicio 4.3. *Calcule* $\int sen(x)sen(2x)dx$

2. **Sustituciones simples.** Se basa en la derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

   $\int F'(g(x))g'(x)dx = \int F'(u)du = F(u) + k, k \in \mathbb{R} = F(g(x)) + k, k \in \mathbb{R}.$

Ejemplo 4.2. *Calcule* $\int sen(3x)dx$.

Solución: Sea $u = 3x$, entonces $du = 3dx$, luego

$\int sen(3x)dx = \frac{1}{3}\int sen(u)du = -\frac{1}{3}cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R} = -\frac{1}{3}cos(3x) + k,\ k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.3. *Calcule* $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$.

Solución: Sea $u = x - 1$, entonces $du = dx$, luego $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx = \int \frac{u+1}{u^4}du = \int(u^{-3} + u^{-4})du = \frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-3}}{-3} + k, k \in \mathbb{R} = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{(x-1)^{-3}}{-3} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.4. *Calcule* $\int \sqrt{3x+1}dx$.

Ejercicio 4.5. $\int tan(x)dx$

Ejercicio 4.6. *Pruebe la siguiente fórmula de reducción:*

$x^n sen(x)\ dx = -xcos(x) + n\int x^{n-1}cos(x)\ dx$

Ejercicio 4.7. *Pruebe la siguiente fórmula de reducción:*

$\int sen^n(x)\ dx = -\frac{1}{n}sen^{n-1}(x)cos(x) + \frac{n-1}{n}\ \int sen^{n-2}(x)\ dx.$

Sugerencia use integración por partes con $u = sen^{n-1}(x),\ dv = sen(x)dx.$

Ejemplo 4.4. *Si la aceleración de un cohete espacial que cae está dada por* $y''(t) = -32\ m/s^2$, *encuentre la posición* $y(t)$ *en un tiempo* t. *Suponga que la velocidad inicial del cohete es* $y'(0) = -100m/s$ *y su posición inicial es* $y(0) = 1000\ mts.$

Solución: Hay que calcular dos primitivas. $y'(t) = \int y''(t)\ dt$ y $y(t) = \int y'(t)\ dt$ donde $y'(t) = \int y''(t)\ dt = \int(-32)\ dt = -32t + k,\ k \in \mathbb{R}$ es la velocidad $v(t)$ del cohete. Luego $-100 = v(0) = -32 \cdot 0 + k = k$, Por lo tanto, $v(t) = y'(t) = -32t - 100$. Necesitamos $y(t) = \int y'(t)\ dt = \int(-32t - 100)\ dt = -16t^2 - 100t + k, k \in \mathbb{R}$. Como la posición inicial es $y(0) = 1000$, se tiene que $1000 = -16 \cdot 0 - 100 \cdot 0 + k$, Luego $k = 1000$ y así se tiene que $y(t) = -16t^2 - 100t + 1000$.

5. Sumas de Riemann e integral definida.

5.1. Sumas de Riemann

Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ (no necesariamente continua ni positiva). Queremos saber que significa el término $\int_a^b f(x)dx$

Definición 5.1. *Una Partición* $\mathbb{P}$ *de* $[a, b]$ *es una colección de n subintervalos*

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots [x_{n-1}, x_n],$$

de $[a, b]$ *tales que*

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

La longitud del i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Si todos los intervalos de la partición tienen igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ se habla de **una partición regular.**

Para cada $i, 1 \leq i \leq n$, sea $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ un punto cualesquiera del intervalo entonces $S = \{x_1^*, x_2^* \cdots, x_n^*\}$ se llama una selección de la partición $\mathbb{P}$.

Definición 5.2. *Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado* $[a, b], \mathbb{P}$ *una partición de* $[a, b]$ *y S una selección de* $\mathbb{P}$. *Entonces* **una suma de Riemann** *para la función f determinada por* $\mathbb{P}$ *y S es*

$$R = \sum_{1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Observación 5.1. *El punto* x_i^* *es un punto arbitrario de subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$. *Se suele escoger de tres formas:*

1) $x_i^* = x_{i-1}$ *el extremo izquierdo de* $[x_{i-1}, x_i]$.

2) $x_i^* = x_i$ *el extremo derecho o de* $[x_{i-1}, x_i]$.

3) $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ *el punto medio de* $[x_{i-1}, x_i]$.

Ejemplo 5.1. *Encuentre las sumas de Riemann asociadas a f donde $f(x) = 5 + x^2$, en $[1, 3]$ usando una partición regular y las tres formas anteriores.*

a) para $n = 6$.

b) para $n \in \mathbb{N}$

Solución: 1.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$, $x_i^* = x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{1}{3} = \frac{i+2}{3}$. Luego

$x_1^* = x_0 = 1$

$x_2^* = x_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$x_3^* = x_2 = 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$x_4^* = x_3 = 1 + 3\frac{1}{3} = 2$

$x_5^* = x_4 = 1 + 4\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x_6^* = x_5 = 1 + 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$$R_{izq} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i+2}{3}\right)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6}[5+(\frac{i+2}{3})^2]\frac{1}{3} = 5\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{3} +$$

$$\sum_{i=1}^{6}(\frac{i+2}{3})^2]\frac{1}{3} = 10 + \frac{1}{27}\sum_{i=1}^{6}(i+2)^2 = 10 + \frac{1}{27}[9+16+25+36+49+64].$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. y $x_i^* = x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{2}{n} = \frac{n+2i-2}{n}$

$$R_{izq} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i-2}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}[5+(\frac{n+2i-2}{n})^2]\frac{2}{n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n} + \sum_{i=1}^{n}(\frac{n+2i-2}{n})^2\frac{2}{n} = n\frac{10}{n} + \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2+4i^2+4+4ni-4n-4i) = 10 + \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n^2 +$$

$$\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}ni - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i = 12 + \frac{2}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+\frac{8}{n^2} + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n} - \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)}{2} = 12 + \frac{4}{3n^2}(n+1)(2n+1) + \frac{8}{n^2} + \frac{4(n+1)}{n}$$

$$-\frac{8}{n} - \frac{4(n+1)}{n^2}.$$

2.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$, $x_i^* = x_i = 1 + i\frac{1}{3} = \frac{i+3}{3}$. Luego

$x_1^* = x_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$x_2^* = x_2 = 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$x_3^* = x_3 = 1 + 3\frac{1}{3} = 2$

$x_4^* = x_4 = 1 + 4\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x_5^* = x_5 = 1 + 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$x_6^* = x_6 = 1 + 6\frac{1}{3} = 3.$

y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{der} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i+3}{3}\right)\frac{1}{3}$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i^* = x_i = 1 + i\frac{2}{n} = \frac{n+2i}{n}$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{der} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i}{3}\right)\frac{2}{n}$$

3.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$.

$x_i^* = m_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{1}{2}[\frac{i+2}{3} + \frac{i+3}{3}] = \frac{1}{6}[2i+5]$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{med} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(m_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{1}{6}[2i+5]\right)\frac{1}{3}$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i^* = m_i = \frac{n+2i-2}{n} + \frac{n+2i}{n} = \frac{2n+4i-2}{n}$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{med} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2n+2i-2}{n}\right)\frac{2}{n}$$

Ejercicio 5.1. *Encuentre las sumas de Riemann R_{izq}, R_{der} de $f(x) = sen(x)$ en $[0, \pi]$ en los subintervalos $[0, \frac{\pi}{3}], [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ y $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$*

5.2. Integral definida

Definición 5.3. *Sea $\mathbb{P}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Se llama* **norma de la partición** $\mathbb{P}$ *al máximo de las longitudes de los subintervalos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ de $\mathbb{P}$ y se anota $|\mathbb{P}|$.*

Definición 5.4. *Sea f una función definida y acotada en $[a,b]$. Se llama* **integral definida de la función f de a a b** *al número real*

$$I = \lim_{|\mathbb{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x_i$$

siempre que este límite exista, en cuyo caso se dice que f es integrable en $[a,b]$.

Notación de Leibniz:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathbb{P}|\to 0} f(x_i{}^*)\Delta x_i$$

a se llama límite inferior de la integral y

b se llama límite superior de la integral.

El siguiente Teorema lo usaremos pero no lo demostraremos aquí

Teorema 5.1. *f continua en $[a,b] \Rightarrow$ f integrable en $[a,b]$.*

Observación 5.2. *En el caso de una función continua en $[a,b]$ y una colección de particiones regulares del intervalo en n subintervalos, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|\mathbb{P}| \to 0 \iff n \to \infty$$

En el caso de una función continua en $[a,b]$ y una partición regular se tiene que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$$

Observación 5.3. *Vimos que la definición de integral se aplica solamente si $a < b$, pero es conveniente incluir los casos $a = b$ y $a > b$. Se define la integral, para estos casos, como*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

De las propiedades de los límites se tienen las siguientes propiedades de las integrales: 1.- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$,

2.- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$

3.- Si $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4.- Si $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

5.- Sean $a < c < b$. Entonces $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

Según la observación 5.3, cualquiera sea el orden entre a, b y c se cumplirá $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

5.3. Evaluación de integrales

Teorema 5.2. Teorema Fundamental del Cálculo 1 parte (TFC 1 parte): *Si g es una primitiva de una función f, en $[a,b]$ es decir, si $g'(x) = f(x),\ \forall\ x \in [a,b]$, y f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\ dx = g(b) - g(a)$.*

Idea intuitiva: (debida a Newton) Introduzcamos una función A como $A(x) = \int_a^x f(u)\ du$. Si el incremento de x es Δx entonces el de A es ΔA.

Se tiene que $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, es decir, $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$, de donde $\frac{dA}{dx} = lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$. Es decir, $A'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ otra primitiva de $f(x)$, es decir $g'(x) = f(x)$ entonces

$$A(x) = g(x) + C.$$

Como $A(a) = \int_a^a f(u)\ du = 0,\ A(b) = \int_a^b f(u)\ du = \int_a^b f(x)\ dx$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)\ dx = A(b) = A(b) - A(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C] = g(b) - g(a).$$

La diferencia $g(b) - g(a)$ se abrevia por $[g(x)]_{x=a}^{x=b}$ o más simple por $[g(x)]_a^b$ y asi el Teorema queda

$$\int_a^b f(x)\ dx = [g(x)]_a^b, \quad g'(x) = f(x)\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

Con esto tenemos por ejemplo que:

$$1. - \int_a^b x^n\ dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},\ \ n \neq -1$$

$$2. - \int_a^b cos(x)\ dx = [sen(x)]_a^b = sen(b) - sen(a)$$

$$3. - \int_a^b sen(x)\ dx = [-cos(x)]_a^b = cos(a) - cos(b)$$

$$4. - \int_a^b c\ dx = c(b-a)$$

$$5. - \int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$$

$$6. - \text{Si } m \leq f(x) \leq M \text{ entonces } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

1. Método de integración por Partes para integrales definidas

$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$

Ejemplo 5.2. *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsen(x)dx$

Solución: Sea $u = x, dv = sen(x)dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -cos(x)$. Luego $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsen(x)dx = [-xcos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx = [-xcos(x) + sen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0cos(0) + sen(0) - [\frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\frac{\pi}{2})] = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 1 = -1$

2. Método de sustitución simple para integrales definidas.

Suponga que g es una función con derivada continua en $[a, b]$ y que f función continua en el conjunto $g([a, b])$. Sea $u = g(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du.$$

En efecto si F es una primitiva de f se tiene que
$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(u)]_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$

Ejercicio 5.2. *Evalue las siguientes integrales* $\int_1^5 (x^3 + 7)\ dx$, $\int_1^4 \sqrt{3x+1}\ dx$, $\int_{-1}^3 2|x|\ dx$

Ejercicio 5.3. *Evalue las siguientes integrales* ; $\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$, $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\ dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen(2x)cos^3(2x)\ dx$,

Observación 5.4. *En el caso de una función continua y positiva se trata del área A bajo la curva $y = f(x)$. Notar que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores $\leq A \leq$ la suma de las áreas de los rectángulos superiores.*

Area bajo una curva: Sea f función continua y positiva en $[a, b]$. Entonces el área A debajo de la gráfica de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $y = b$ es $A = \int_a^b f(x)\, dx$.

Ejercicio 5.4. *Calcule el área bajo la curva $y = 1 + x$ en el intervalo $[-2, 5]$.*

Area entre curvas o regiones planas con respecto al eje X: Sean f y g funciones continuas tales $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y por las rectas verticales $x = a$ e $x = b$ es $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$.

Area entre curvas o regiones planas con respecto al eje Y: Sean f y g funciones continuas tales $f(y) \geq g(y)\ \forall\ y \in [c, d]$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $x = f(y)$ e $x = g(y)$ y por las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$ es $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$.

Ejercicio 5.5. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = 2x - 2$. Haga un esbozo de la región.*

Ejercicio 5.6. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = -x^2 + 4$. Haga un esbozo de la región.*

Trabajo

El concepto de trabajo se introduce para medir el efecto acumulado de una fuerza al mover un cuerpo de una posición a otra. En el caso más sencillo, una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza constante. Si la fuerza tiene magnitud F y la partícula se mueve a lo largo de una distancia d, entonces el trabajo realizado por la fuerza está dado por $W = F \cdot d$.

Usaremos la integral para generalizar la definición de trabajo al caso en que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza variable.

Se define el trabajo W realizado por la fuerza $F(x)$ al mover la partícula de $x = a$ a $x = b$ como

$$W = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Trabajo realizado contra la gravedad. De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza $F(r)$ que se debe ejercer sobre un cuerpo para mantenerlo a una distancia r, $(r \geq R$, el radio de la tierra) del centro de la tierra es

$$F(r) = \frac{k}{r^2}$$

donde k es una constante positiva.

Ejercicio 5.7. *¿Cuánto trabajo debe realizarse para levantar un satélite de* 1000 *libras de manera vertical con respecto de la superficie de la Tierra hasta una órbita* 1000 *millas sobre la superficie? Considere* $R = 4000$ *millas como el radio de la Tierra.*

Solución: Como $F(R) = 1000$ (libras) cuando $R = 4000$ millas, se tiene que $k = F(R)R^2 = 1000 \cdot (4000)^2 = 16 \cdot 10^9(\text{libras} \cdot \text{millas}^2)$. Por lo tanto,
$W = \int_{4000}^{5000} F(r)\, dr = \int_{4000}^{5000} \frac{k}{r^2}\, dr = [-\frac{k}{r}]_{4000}^{5000} = 16 \cdot 10^9[\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}] = 8 \cdot 10^5$ (millas $\cdot$ libras).

5.4. Valor promedio de una función y Teorema Fundamental del Cálculo 2 parte

Valor promedio de una función: Sea f función integrable en $[a, b]$. Entonces el valor promedio $\overline{y}$ de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es $\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}$

Teorema 5.3 (Teorema Fundamental del Cálculo 2 parte)**.** *Sea f función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se define una función F en $[a, b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.*

Demostración: Tenemos que

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right)$$

Pero

$$\int_a^{x+h} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Así

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Usando el valor promedio de f en $[x, x+h]$ se tiene que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(\overline{t}), \text{ para algún } \overline{t} \in [x, x+h]$$

Notemos que $\overline{t} \to x$ cuando $h \to 0$ y como f es continua, se tiene que

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \lim_{\overline{t}\to x} f(\overline{t}) = f(x).$$

Ejemplo 5.3. *Derive la función* $h(x) = \int_0^{x^2} t^3 sen(t)\, dt$,

Observamos que $h(x) = F(g(x))$, donde $F(x) = \int_0^x t^3 sen(t)\, dt, g(u) = u^2$. Luego $F'(a) = a^3 sen(a)$ y por lo tanto

$h'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = (x^2)^3 sen(x^2)2x = 2x^6 x sen(x^2) = 2x^7 sen(x^2)$.

5.5. Función Logaritmo Natural

Sea $x > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Se define la función

$$ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ por } ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Propiedades:

1.- $ln(1) = 0$.

2.- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$, luego es una función creciente y como $(ln(x))'' = -\frac{1}{x^2}$, es cóncava hacia abajo. Hacer el gráfico.

3.- $ln(xy) = ln(x) + ln(y)\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \ y > 0$.

$ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$. Sea $u = \frac{t}{x}$, o bien $t = ux$, luego $dt = xdu$ y tenemos

$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{y} \frac{1}{u}\, du = ln(y)$. Reemplazando queda $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

4.- $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ ln(x^k) = k ln(x)$.

5.- $\forall\, x\ >\ 0\ \ ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)$ Note que $0 = ln(1) = ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = ln(x) + ln\left(\frac{1}{x}\right)$ Entonces $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$

6.- $\lim\limits_{x\to\infty}\ ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ ln(x) = -\infty$.

7.- $Rec(ln) = \mathbb{R}$

Nota. Sea $x\ <\ 0$. Luego $-x\ >\ 0$. Así, $ln(-x) = \int_1^{-x} \frac{1}{t}\, dt$

Con esto tenemos que si $x \neq 0$, $ln(|x|) = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt$ Se anota $ln|x| = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt$

Con esto tenemos que $\int \frac{1}{u}\, du = ln|u| + c$. Sin embargo, las primitivas de una función están asociadas a intervalos de la función, así que la igualdad anterior es válida en los positivos, o en los negativos, pero no ambos a la vez.

Con esto $\int tan(x)\, dx = ln|cos(x)| + c$.

Ejercicio 5.8. *Pruebe que a)* $\forall\, x, y\ >\ 0\ \ ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$.

b) $\forall\, x\ >\ 0,\ q \in \mathbb{Q}\ \ ln(x^q) = q\, ln(x)$.

Ejercicio 5.9. *Pruebe que* $\int sec(x)\, dx = ln|sec(x) + tan(x)| + c$.

5.6. Funciones inversas, existencia, continuidad y derivada

Una función $f : A \to B$ es *invertible* ssi es *biyectiva*. En tal caso su *inversa* es la función denotada f^{-1} con $f^{-1} : B \to A$ que cumple

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y) \wedge x \in B \wedge y \in A$$

Nota: **no confunda** la función inversa f^{-1} con el recíproco de f, que cumple

$$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

Ejemplo 5.4. *Si* $f : (-\infty, 0] \to [2, \infty)$ *está dada por* $f(x) = 2 + x^2$, *entonces es biyectiva y por tanto invertible, y su inversa es*

$$f^{-1} : [2, \infty) \to (-\infty, 0] \text{ dada por } f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 2}$$

Se tiene:

1. Si f es invertible y continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio

2. Si f es invertible y derivable en un punto $x = c$, y $f'(c) \neq 0$, entonces su inversa f^{-1} es derivable en b, con $b = f(c)$, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}$$

Ejemplo 5.5. *Si* $f : (-\infty, 0] \to [2, \infty)$ *está dada por* $f(x) = 2+x^2$, *como* $f(-3) = 11$ *y* $f'(-3) = -6 \neq 0$, *entonces se cumple* $(f^{-1})'(11) = \dfrac{1}{f'(-3)} = \dfrac{1}{-6}$. *Más aún, si* $a < 0$, *como* $f'(a) = 2a \neq 0$, *entonces* $(f^{-1})'(2 + a^2) = \dfrac{1}{2a}$, *porque* $2 + a^2 = f(a)$

5.7. Función Exponencial

La función logaritmo natural $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es biyectiva luego tiene inversa la función exponencial $= exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que

1) $\forall\, x > 0 \;\; exp(ln(x)) = x$.

2) $\forall\, y \in \mathbb{R} \;\; ln(exp(y)) = y$.

O sea $y = exp(x)$ si y solo si $x = ln(y)$

Observación: Otra notación para $exp(x)$ es e^x

Propiedades:

1.- $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; e^0 = 1, \;\; (e^x)' = e^x$

Se tiene que $ln(e^x) = x$, luego $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$. De donde, $(e^x)' = e^x$.

2.- e^x, es creciente en $\mathbb{R}$

3.- $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\; e^{x+y} = e^x e^y$. En efecto se tiene $ln(e^x e^y) = ln(e^x) + ln(e^y) = x + y = ln\left(e^{x+y}\right)$, pero ln es inyectiva luego $e^x e^y = e^{x+y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

4.- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, q \in \mathbb{Q} \;\; (e^x)^q = e^{xq}$.

Ejercicio 5.10. *Determine* $\frac{dy}{dx}$ *para* $y = ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}\right)$

Ejercicio 5.11. *Evalue o calcule según corresponda:*

a) $\int_2^4 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{x(ln(x))^2}\,dx$ *c)* $\int \frac{cos(x)}{1+sen(x)}\,dx$ *d)* $\int xe^{-3x^2}\,dx$

e) $\int xe^x\,dx$ *f)* $\int cos(x)e^{sen(x)}\,dx$ *g)* $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x^3}}\,dx$

Ejercicio 5.12. *Derive las funciones: b)* $f(x) = e^{4-x^2}$ *c)* $g(x) = ln(x + e^{-x})$

d) $k(x) = e^{-2x}sen(3x)$ *e)* $r(t) = (e^{2t} + e^{3t})^7$

Ejemplo 5.6. *Use la propiedades de la función logaritmo para probar que* $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Se tiene que si $t > 0$, $\frac{1}{t} = (ln(t))' = \lim_{h\to 0}\frac{ln(t+h)-ln(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(\frac{t+h}{t}\right) = \lim_{h\to 0} ln\left(\frac{t+h}{t}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{t}\right)^{\frac{1}{h}}$. Sea $n = \frac{1}{h}$ Luego $\frac{1}{t} = \lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n$. Si ponemos $x = \frac{1}{t}$, queda $x = \lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n$. Pero ln es continua, luego $x = ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n\right)$ Así se tiene que si $x > 0, e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Veamos que si $x < 0$, entonces $x = -k, k > 0$ luego $e^x = e^{-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-t}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Y también vale para $x = 0$.

Función Exponencial en base $a,\ a > 0$.

Definición 5.5. *Se define la función exponencial en base a como la función*

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ \textit{definida por}\ exp_a(x) = a^x = e^{xln(a)}.$$

Propiedades: Sea $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Entonces:

1.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ \ a^0 = 1,\ \ (a^x)' = ln(a)a^x$

2.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}\ \ a^{x+y} = a^x a^y$.

3.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

4.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}\ \ (a^x)^y = a^{xy}$.

Ejemplo 5.7. *Calcule la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2^{ln(x)}$.

b) $g(x) = 2^x 3^{x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = (e^{ln(x)ln(2)})' = e^{ln(x)ln(2)}\frac{(ln(x))'}{ln(2)} = 2^{ln(x)}\frac{1}{xln(2)}$.

b) $g'(x) = (e^{xln(2)}e^{x^2ln(3)})' = (e^{xln(2)+x^2ln(3)})' = e^{xln(2)+x^2ln(3)}[xln(2)+x^2ln(3)]' = e^{xln(2)}e^{x^2ln(3)}[ln(2)+2xln(3)] = 2^x3^{x^2}[ln(2)+2xln(3)]$.

Ejemplo 5.8. *Calcule la siguiente integral indefinida* $\int 6x^3 5^{x^4+7}\,dx$

Solución: Sea $u = x^4+7$, luego $du = 4x^3dx$. Por lo tanto

$\int 6x^3 5^{x^4+7}\ dx = 6\int x^3 5^{x^4+7}\ dx = \frac{6}{4}\int 5^u\ du = \frac{3}{2}\int e^{uln(5)}\ du = \frac{3}{2}\frac{e^{uln(5)}}{ln(5)} + k = \frac{3}{2}\frac{e^{(x^4+7)ln(5)}}{ln(5)} + k = \frac{3}{2}\frac{5^{(x^4+7)}}{ln(5)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Función logaritmo en base $a,\ a > 0$.

Sean $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Se define la función

$$log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ por } log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

Proposición 5.1. *La función* log_a *satisface las propiedades*

a) $\forall\ x\ \in \mathbb{R}^+\ \ exp_a(log_a(x)) = x$.

b) $\forall\ y\ \in \mathbb{R}\ \ log_a(exp_a(y)) = y$.

Luego log_a *es la función inversa de* exp_a *y satisface*

$$y = log_a(x) \text{ si y solo si } x = a^y$$

Demostración: a) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $exp_a(log_a(x)) = exp_a(\frac{ln(x)}{ln(a)}) = a^{\frac{ln(x)}{ln(a)}} = e^{\frac{ln(x)}{ln(a)}ln(a)} = e^{ln(x)} = x$.

b) En forma similar.

La función log_a satisface también las siguientes propiedades:

1.- $log_a(1) = 0$.

2.- $\forall\ x \in \mathbb{R}^+\ \ (log_a(x))' = \frac{1}{xln(a)}$.

3.- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$.

4.- $\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}\ \ log_a(x^y) = ylog_a(x)$.

5.- $\forall\ y \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(\frac{1}{y}) = -log_a(y)$.

6.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$.

Nota: Si $a = e$ se tiene el logaritmo natural ln y si $a = 10$, se tiene log_{10}, llamado logaritmo común.

Ejemplo 5.9. *Calcule la derivada de las siguientes funciones:*
a) $\forall\ x \in \mathbb{R}^+\ \ f(x) = 2^{\sqrt{x}}$, *b)* $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ g(x) = log_3(4^{x^2})$, *c)*$\forall\ x \in \mathbb{R}^+\ \ h(x) = x^{cos(x)}$.

Solución: a) $f'(x) = (e^{\sqrt{x}ln(2)})' = e^{\sqrt{x}ln(2)}(\sqrt{x}ln(2))' = 2^{\sqrt{x}}[ln(2)\frac{1}{2\sqrt{x}}]$.

b) $g'(x) = (log_3(4^{x^2}))' = (\frac{ln(4^{x^2})}{ln(3)})' = (x^2\frac{ln(4}{ln(3)})' = 2x\frac{ln(4}{ln(3)}$.

c) $ln(h(x)) = ln(x^{cos(x)}) = cos(x)ln(x)$, luego $h(x) = e^{cos(x)ln(x)}$, por lo tanto, $h'(x) = (e^{cos(x)ln(x)})' = e^{cos(x)ln(x)}[cos(x)ln(x)]' = h(x)[-sen(x)ln(x) + cos(x)\frac{1}{x}] = x^{cos(x)}[-sen(x)ln(x) + cos(x)\frac{1}{x}]$.

Aplicaciones de la función Exponencial.

1.- Crecimiento poblacional. *Sea $P(t)$ una población con tasas de natalidad β y de mortandad δ. (β, δ constantes), t se mide en años. Se tiene que la razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional al tamaño de la población, es decir,*

$$\frac{dP}{dt} = kP,\ o\ bien\ P'(t) = kP(t)$$

donde $k = \beta - \delta$ es la tasa de crecimiento anual. ¿Cuánto vale $P(t)$?

2.- Desintegración radiactiva. *Se considera una muestra que tiene $N(t)$ átomos de isótopo radiactivo en el momento t. Se ha observado que una fracción constante de estos átomos radioactivos decae expontáneamente durante cada unidad de tiempo. Para conseguir un modelo para $N(t)$ se usa la ecuación diferencial*

$$\frac{dN}{dt} = -kN,\ o\ bien\ N'(t) = -kN(t)$$

con $k > 0$. Su solución es $N(t) = N(0)e^{-kt}$ donde $N(0)$ es el número de átomos radioactivos presentes en la muestra en el tiempo $t = 0$. Se llama **vida media τ de un isótopo** *al tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad inicial se desintegre en otros elementos, es decir $\tau = t$ cuando $N(t) = \frac{1}{2}N(0)$. Pruebe que $\tau = \frac{ln(2)}{k}$.*

3.- Ley de enfriamiento de Newton. *La razón de cambio con respecto al tiempo t de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura T_a del medio, es decir*

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \text{ o bien } T'(t) = k(T(t) - T_a)$$

donde $k < 0$. Su solución es $T(t) = [T(0) - T_a]e^{kt} + T_a$.

Ejemplo 5.10. *Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa inflamación séptica en la garganta) contiene 100 células. Al revisar el cultivo 60 minutos después, se determina que hay 450 células.*

a) Determine el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos), suponiendo que el crecimiento es exponencial.

b) ¿Cúal es el tiempo de duplicación de esta bacteria? (el tiempo de duplicación es el tiempo que se requiere para que el número de células se duplique).

Solución: Crecimiento exponencial significa que $P'(t) = kP(t)$, donde $P(t)$ es el número de células en el tiempo t. Luego $\frac{P'(t)}{P(t)} = k$.

Integrando se tiene que $ln(|P(t)|) = kt + C$, como $P(t) > 0$, $|P(t)| = P(t)$, luego $ln(P(t)) = kt + C$.

Por lo tanto, $P(t) = e^{kt+C} = e^{kt}e^C$. Para $t = 0$, se tiene el número inicial de células, se tiene que $P(0) = e^C$, de donde finalmente

$$P(t) = P(0)e^{kt}$$

donde $P(0)$ es el número inicial de células (la población inicial).

En nuestro problema $P(0) = 110$. Luego $P(t) = P(0)e^{kt} = 100e^{kt}$. Sabemos además que $P(60) = 450$, luego $450 = 100e^{k60}$, es decir, $4,5 = e^{60k}$. Usando logaritmos se tiene que $ln(4,5) = 60k$, de donde $k = \frac{ln(4,5)}{60}$.

a) Por lo tanto $P(t) = 100e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$.

b) Queremos calcular t tal que $200 = 100e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$. Se tiene que $2 = e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$, luego, $ln(2) = \frac{ln(4,5)}{60}\,t$ y así $t = \frac{60ln(2)}{ln(4,5)} \sim 27,65$.

Luego el tiempo de duplicación para este cultivo de Streptococcus A es cerca de 28 minutos.

Ejemplo 5.11. *Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de* 180^oF*. Después de dos minutos de permanecer en una sala a* 70^oF*, el café se enfría hasta* 165^oF*. a) Calcule la temperatura en cualquier tiempo* t*.*

b) ¿ En qué tiempo t *el café llega a una temperatura tolerable de* 120^oF*.?*

Solución: Es un problema de la ley de enfriamiento de Newton. Su modelo es $T'(t) = k(T(t) - T_a)$ y su solución es $T(t) = [T(0) - T_a]e^{kt} + T_a$, donde $T(0) = 180$ es la temperatura inicial y $T_a = 70$ la temperatura ambiente. Por lo tanto, se tiene que $T(t) = 110e^{kt} + 70$,

Pero $T(2) = 165$, de donde $165 = 110e^{2k} + 70$, de donde $e^{2k} = \frac{95}{110}$ y $2k = ln(\frac{95}{110})$ y asi $k = \frac{1}{2}ln(\frac{95}{110}) \sim -0,0733017$ y

$$T(t) = 110e^{-0,0733017t} + 70$$

b) ¿Para que t se tiene que $T(t) = 120$?

$120 = 110e^{-0,0733017t} + 70$, usando logaritmo natural se llega a $t \sim 10,76$ minutos.

Ejercicio 5.13. *La vida media de la morfina en el torrente sanguíneo humano es de tres horas. Si inicialmente hay 0,4 mg de morfina en el torrente sanguíneo, halle la ecuación para la cantidad de morfina presente en el torrente sanguíneo después de* t *horas.*

Resp. $y(t) = 0,4\left(\frac{3}{2}\right)^t$.

¿Cuándo llegará la cantidad por debajo de 0.01 mg?

Ejercicio 5.14. *Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el* $63\,\%$ *de carbono 14 con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra ? Resp: Aproximadamente 3800 años.*

Ejercicio 5.15. *Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el* $63\,\%$ *de carbono 14 con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra ? Resp: Aproximadamente 3800 años.*

5.8. Integrales Impropias

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe si f es continua en $[a, b]$.

Las Integrales Impropias son de dos tipos:

a) El intervalo de integración de la forma $[a, +\infty]$, $[-\infty, a]$, $(-\infty, +\infty]$

b) El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto c, es decir, $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, o bien hay una asíntota vertical en ese punto.

Caso a) 1. f continua en $[a, +\infty)$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe.

Caso a) 2. f continua en $(-\infty, b]$ entonces $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$, si este límite existe.

Caso a) 3. f continua en $(-\infty, +\infty)$ entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ donde c es cualquier número real.

Si el límite existe, se dice que la integral impropia converge. En caso contrario se dice que la integral impropia diverge.

Ejemplo 5.12. *Investigue las integrales impropias. a)* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$, *b)* $\int_1^{+\infty}(1-x)e^{-x}\,dx$,

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$, *d)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Sol. a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx = lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-3} = lim_{t\to+\infty}(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
Luego la integral converge.

c)) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = lim_{t\to-\infty}(-2\sqrt{1-x}) =$
$lim_{t\to-\infty}(-2\sqrt{1-t} - 2) = +\infty$. Luego la integral diverge.

Caso b) 1. f continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ si este límite existe.

Caso b) 2. f continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$ si este límite existe.

Caso b) 3. f continua en $[a,b]$ salvo en un punto $c \in (a,b)$ donde f tiene una discontinuidad infinita, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Ejemplo 5.13. *Investigue las integrales impropias. a)* $\int_{-1}^{h} 3\frac{1}{x^4}\,dx$, *b)* $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$,

Sol. b) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \cdots = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}3^{\frac{1}{3}}$

6. Sucesiones y Series infinitas de números reales

6.1. Sucesiones

Definición 6.1. *Una sucesión infinita de números reales, en adelante una sucesión, es una función* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to S(n)$. *Denotaremos* $S(n) = S_n$ *y* S *por* $(S_n)_{n\in N}$ *o por* $\{S_n\}_{n\in N}$

$(S_n)_{n\in N} = S_1, S_2, \cdots, S_n \cdots$

S_1 se llama el primer término de la sucesión, S_2 el segundo término, y así sucesivamente S_n el $n-$ésimo término de la sucesión $(S_n)_{n\in N}$.

Ejemplo 6.1. $(\frac{1}{n})_{n\in N} = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

Ejemplo 6.2. $(\frac{1}{n!})_{n\in N} = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n!}, \cdots$

Ejemplo 6.3. $(1+(-1)^n)_{n\in N} = 0, 1, 0, 1, \cdots, 1+(-1)^n, \cdots$

Ejemplo 6.4. *Sucesión de Fibonacci* $(F_n)_{n\in N}$ *dada por recurrencia:*

$$F_1 = F_2 = 1,$$

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n,\ \ \forall\ n \geq 2$$

Luego $F_3 = 2, F_4 = 3,$ *etc.*

Definición 6.2. *Límite de una sucesión* $(S_n)_{n\in N}$: $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo* $\epsilon \in \mathbb{R}^+,\ \ \exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n \geq N\ |S_n - L| < \epsilon$.

Definición 6.3. *Diremos que una sucesión $(S_n)_{n\in N}$ es convergente si y solo si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe. En caso contrario diremos que $(S_n)_{n\in N}$ es divergente.*

Ejercicio 6.1. *Probar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Como las sucesiones son funciones entonces se definen en forma natural nuevas sucesiones: Sean $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ dos sucesiones entonces son también sucesiones

i) $(S_n)_{n\in N} + (T_n)_{n\in N} = (S_n + T_n)_{n\in N}$

ii) $\lambda(S_n)_{n\in N} = (\lambda S_n)_{n\in N}, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}.$

iii) $(S_n)_{n\in N}(T_n)_{n\in N} = (S_n T_n)_{n\in N}$

iv) $\frac{(S_n)_{n\in N}}{(T_n)_{n\in N}} = (\frac{S_n}{T_n})_{n\in N}, T_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Usando propiedades de los límites de funciones se tienen los siguientes resultados:

Teorema 6.1. *Sean $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ dos sucesiones convergentes y sea $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} T_n = M \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty} (S_n + T_n) = L + M.$
2. $\lim_{n\to\infty} (\lambda S_n) = \lambda L, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $\lim_{n\to\infty} (S_n T_n) = LM.$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \frac{L}{M}$, *si* $T_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $M \neq 0.$

Teorema 6.2. *(Ley se sustitución) Sea $(S_n)_{n\in N}$ sucesión convergente y sea $\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$. Si f es una función continua en L entonces $\lim_{n\to\infty} f(S_n) = f(\lim_{n\to\infty}(S_n)) = f(L)$.*

Ejemplo 6.5. *Calcule* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n-1}{n+7}}$.

$(S_n)_{n\in N} = \frac{3n-1}{n+7}{}_{n\in N}$ es convergente pues $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{7}{n}} = 3.$
Como $\frac{3n-1}{n+7} > 0$ la raíz cuadrada de $\frac{3n-1}{n+7}$ es continua, luego
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n-1}{n+7}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+7}} = \sqrt{3}.$

Teorema 6.3. *(Teorema del sandwich para sucesiones) Sean* $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}, (U_n)_{n\in N}$ *sucesiones tales que* $S_n \leq T_n \leq U_n$ *y sea* $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} U_n = L \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} T_n = L$.

Nota 1. $\lim_{n\to\infty} |S_n| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 0$. Es decir si la sucesión de los valores absolutos converge a cero, entonces la sucesión también converge a cero. En efecto, se tiene que $-|S_n| \leq S_n \leq |S_n|$ y sabemos que $\lim_{n\to\infty} |S_n| = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} -|S_n| = 0$ luego por Teorema del sandwich $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

El Recíproco no es cierto. Por ejemplo sea $(S_n)_{n\in N} = ((-1)^n)_{n\in N}$ es una sucesión que diverge pues tiene dos límites 1 y -1. Sin embargo la sucesión de sus valores absolutos converge a 1.

Ejemplo 6.6. *Pruebe que la sucesión* $(\frac{(-1)^n sen(n)}{n^2})_{n\in N}$ *converge a* 0.

Solución: Veamos que $\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^n sen(n)}{n^2}| = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n^2} = 0$.
Sabemos que $-1 \leq sen(n) \leq 1$, luego

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{sen(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Pero $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0$. Luego por Teorema del sandwich, $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n^2} = 0$.

Nota 2. Sea f función definida para todo real $x \geq 1$ y sea $(S_n)_{n\in N}$ sucesión tal que $f(n) = S_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = L$$

Debido a la nota anterior puede usarse la regla de L'Hôpital para sucesiones. Sean f, g funciones definidas para todo real $x \geq 1$ y sean $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ sucesiones tales que $f(n) = S_n, \ \ g(n) = T_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si los dos últimos límites existen

Sucesiones crecientes, decrecientes y acotadas

Definición 6.4. *Se dice que una sucesión* $(S_n)_{n\in N}$ *es*

i) **creciente** *si* $S_n < S_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

ii) **decreciente** *si* $S_n > S_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

iii) **monótona** *si es creciente o decreciente.*

iV) **acotada** *si existe* $M \in \mathbb{R}, M > 0$ *tal que* $|S_n| \leq M, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$

Teorema 6.4. *Toda sucesión convergente es acotada*

El recíproco no es cierto, pero tenemos el resultado

Teorema 6.5. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

6.2. Series

Se llama **serie de números reales** a una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

donde $a_1 =$ primer término de la serie, $\cdots a_n = n-$ ésimo término de la serie.

Nota: A veces se utiliza la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_o + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ donde $a_0 =$ primer término de la serie, $\cdots a_n = n-$ ésimo término de la serie.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podemos formar **la sucesión de sumas parciales** $(S_n)_{n\in N}$ definida por:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3,$

.

.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = S_{n-1} + a_n$

Definición 6.5. *Diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si la sucesión de sumas parciales* $(S_n)_{n\in N}$ *converge si y solo si* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *existe.*

Observación 6.1. *Si existe un número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene suma S y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.*

En el caso en que la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in N}$ diverge se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y no tiene suma.

Ejercicio 6.2. *Considere la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ Pruebe por inducción que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ y que la serie converge a 2.*

PROPIEDADES:

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Entonces

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente para todo λ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.7. *A un paciente se le administra una inyección de 10 unidades de cierta medicina cada 24 horas. La medicina se elimina exponencialmente de manera que la fracción que permanece en el cuerpo del paciente después de t días es $f(t) = e^{\frac{-t}{5}}$. Si el tratamiento continúa de manera indefinida, ¿ aproximadamente cuántas unidades de la medicina habrá finalmente en el cuerpo del paciente, justo antes de una inyección ?*

Solución: De la dosis original de 10 unidades, quedan $10e^{\frac{-1}{5}}$ unidades en el cuerpo del paciente después de 1 día (justo antes de la segunda inyección). Es decir,

Cantidad presente en el cuerpo después de 1 día $= S_1 = 10e^{\frac{-1}{5}}$.

Después de 2 días, en el cuerpo del paciente se hallarán los residuos de las 2 primeras dosis. De la dosis original, solo quedan $10e^{\frac{-2}{5}}$(después de 2 días) y de la segunda dosis se encuentran $10e^{\frac{-1}{5}}$ unidades. Por lo tanto,

Cantidad presente en el cuerpo después de 2 días $= S_2 = 10e^{\frac{-1}{5}} + 10e^{\frac{-2}{5}}$.

En forma similar se tiene que,

Cantidad presente en el cuerpo después de n días $= S_n = 10e^{\frac{-1}{5}} + 10e^{\frac{-2}{5}} + \cdots + 10e^{\frac{-n}{5}}$.

La cantidad S de medicamento que queda aún en el cuerpo del paciente a largo plazo es $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 10e^{\frac{-k}{5}} = 10 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{-1}{5}})^k = 10 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{-1}{5}} (e^{\frac{-1}{5}})^k = 10e^{\frac{-1}{5}} \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{-1}{5}}} \right) \sim 45,17$ unidades.

Para ver si una serie es convergente usaremos los siguientes criterios, algunos de los cuales serán probados en clase.

Resumen de criterios para series:

Criterio	*Serie*	*Converge*	*Diverge*
término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	No para convergencia	Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	Si $\|r\| < 1$ Su suma es $S = \frac{a}{1-r}$	Si $\|r\| \geq 1$
Serie telescópica	$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$	Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ Su suma es $S = L - a_1$	
Integral, *sea* f *continua positiva, decreciente*	$\sum_{n=1}^{\infty} a_i$, $a_i = f(i) \geq 0$	Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *converge*	Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *diverge*
p-Serie	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	Si $p > 1$	Si $0 < p \leq 1$
Serie alternada	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$	Si $0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	
Comparación directa $(a_n, b_n > 0)$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*	Si $0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge*
Comparación en el límite $(a_n, b_n > 0)$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*	Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge*
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$	Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$
Cuociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Si $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$	Si $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1$

Convergencia absoluta y convergencia condicional.

Definición 6.6. *Se dice que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es condicionalmente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente pero* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es divergente.*

Ejemplo 6.8. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ *es condicionalmente convergente*

Solución: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (llamada serie armónica) es divergente por el criterio de la integral pues $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [ln(x)]_1^t = \lim_{t\to\infty} [ln(t) - ln(1)] = \infty$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ es alternada. Se tiene $a_n = \frac{1}{n}$ y $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, y $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Luego por Criterio de series alternadas, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente.

Proposición 6.1. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración: Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Tenemos además que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$.

Luego por Criterio de Comparación directa la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ es convergente. Por otro lado $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, y las series $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ son convergentes, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo 6.9. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ *es condicionalmente convergente.*

Solución: Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, $x > 1$ entonces $f(n) = a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Entonces, usando L'Hopital se tiene que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/2\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$

Para probar que $a_{n+1} \leq a_n$, usaremos la derivada $f'(x)$ que es $f'(x) = \frac{\sqrt{-x+1}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

Como $x > 1$, se tiene que $f'(x) < 0$, luego $\forall\ x, x > 1, f$ es decreciente, es decir, $f(x+1) < f(x)$, y así $a_{n+1} \leq a_n$. Por Criterio de series alternadas se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ es convergente.

Además la serie es condicionalmente convergente pues la serie de valores absolutos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ es divergente por comparación en el límite con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la cual es divergente al ser una p serie con $p = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 6.3. *Determinar la convergencia o divergencia de las series. Justifique.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

Ejercicio 6.4. *Determinar la convergencia de las siguientes series y en caso afirmativo, si lo hacen absoluta o condicionalmente.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n+1)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$

7. Números Complejos

La ecuación $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución en $\mathbb{R}$. Construiremos un cuerpo $\mathbb{C}$ que contenga las soluciones de dicha ecuación y que respete las propiedades de la suma y multiplicación operaciones de $\mathbb{R}$. Sean i y $-i$ dichas soluciones. Queremos que $ai = ia,\ a(bi) = abi,\ \ \forall\ \ a, b \in \mathbb{R}$. Dado $z = a + bi,\ a$ se llama **la parte real de z y se anota** $Re(z)$ y b se llama **la parte imaginaria de z y se anota** $Im(z)$. Todo complejo $z = a + bi$ (forma algebraica o cartesiana) se escribe también como el par ordenado $z = (a, b)$. Se tiene que

$$a + ib = c + id \iff a = c \ \wedge\ b = d.$$

Definamos en $\mathbb{C}$: Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Producto: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

La suma es asociativa, conmutativa, existe neutro: $0+0i$, opuesto $-(a+bi) = -a-bi$. El producto es asociativo, conmutativo, existe elemento uno: $1+0i$, inverso de $z = a+bi$, es $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Dado $z = a+bi$, se definen **el conjugado de** z como el complejo $\overline{z} = a-bi$ y **el módulo de** z como el número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Dibujar.

Se tienen las propiedades siguientes

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

2. $|z|^2 = z\overline{z}$.

3. $\overline{\overline{z}} = z, \quad z + \overline{z} = 2Re(z), \quad Re(z) \leq |z|$.

4. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad |z| = |\overline{z}|$

5. $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}, \quad |zz'| = |z||z'|$,

6. $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

Consecuencia: Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Ejemplo 7.1. *Escriba en la forma cartesiana $a+bi$ el complejo $\frac{3-2i}{4+5i}$.*

Solución: Como queremos que $a, b \in \mathbb{R}$, debemos usar la propiedad de que $z > 0$ si $|z| \neq 0$ para $z = 4+5i$. Tenemos así que

$\frac{3-2i}{4+5i} = \frac{3-2i}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i} = \frac{12-8i-15i+10i^2}{16+25} = \frac{2-23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$.

Luego $\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$ es la forma cartesiana de $\frac{3-2i}{4+5i}$.

Ejercicio 7.1. *Escriba en la forma cartesiana $a+bi$ los siguientes complejos:*

$$\frac{2-3i}{(1-4i)(2-i)}, \quad \frac{(i(-5i-3)}{(8-2i)(-3+4i)}.$$

7.1. Forma polar o trigonométrica de un número complejo:

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C},\ z \neq 0_{\mathbb{C}}$. **Sea $\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, el ángulo que forma el semieje positivo de las X con la recta que une $(0,0)$ con (a,b) medido en sentido contrario a los punteros del reloj.** Entonces $cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|},\ sen(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$. Entonces

$$z = |z|\ [cos(\theta) + isen(\theta)],$$

es **la forma polar** o trigonométrica de z. El ángulo θ se llama el argumento del complejo z. Se anota $\arg(z)$. Dibujar.

Nota: También se usa la notación $[cos(\theta) + isen(\theta)] = e^{i\theta}$.

Ejemplo 7.2. *Encuentre la forma polar del complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$.*

Solución: Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$. Entonces $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Además $sen(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y θ en el cuarto cuadrante. Luego $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Por periodicidad, podemos usar $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ Luego la forma polar de $z = 1 - \sqrt{3}i$ es $z = 2[cos(-\frac{5\pi}{3}) + isen(-\frac{5\pi}{3})]$.

Ejercicio 7.2. *Encuentre la forma polar de $z = 1 - i$*

Proposición 7.1. *Sean $z = |z|[cos(\theta) + isen(\theta)],\ z' = |z'|[cos(\theta) + isen(\theta')] \in \mathbb{C}$. Pruebe que*

a) $zz' = |zz'|[cos(\theta + \theta') + isen(\theta + \theta')]$.

b) $z^{-1} = |z|^{-1}[cos(-\theta) + isen(-\theta)],\ \ si\ z \neq 0$.

c) $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}[cos(\theta - \theta') + isen(\theta - \theta')]$.

Ejercicio 7.3. *Encuentre la forma polar de los complejos $z = (1 - i)(3 + 3i),\ \ y$ $z = \frac{1-i}{3+3i}$.*

Ejemplo 7.3. *Escriba en la forma cartesiana $a + bi$ el complejo $\frac{z}{z'}$, donde $z = 4[cos(\frac{5\pi}{12}) + isen(\frac{5\pi}{12})],\ \ z' = \frac{1}{2}[cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})]$.*

Solución: Sean $\theta = 5\frac{\pi}{12}$, $\theta' = \frac{\pi}{4}$, entonces por Proposición 2.1 c)
$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}\,[cos(\theta-\theta') + isen(\theta-\theta')] = \frac{4}{\frac{1}{2}}[cos(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4})] =$
$8[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})] = 8\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 4\sqrt{3} + 4i.$

7.2. Potencias de números complejos.

Teorema 7.1. Teorema de de Moivre: *Sea* $z = |z|\ [cos(\theta) + isen(\theta)] \in \mathbb{C}$, *entonces*

$$z^n = |z|^n\,[cos(n\theta) + isen(n\theta)]\ \ \forall\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Dem: Inducción sobre n.

Ejercicio 7.4. *Probar que: a)* $z^n z^k = z^{n+k}, \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$.

b) $i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^{4k+n} = i^n\ \ \forall\, n, k \in \mathbb{N}$.

Sol: a) $z^n = |z|^n\,[cos(n\theta) + isen(n\theta)],\ \ z^k = |z|^k\,[cos(k\theta) + isen(k\theta)],\ \ \forall\, n, k \in \mathbb{N}$.
Luego por Proposición 2.1 parte a) se tiene:
$z^n z^k = |z|^n|z|^k\,[cos((n+k)\theta) + isen((n+k)\theta)] = |z|^{n+k}\,[cos((n+k)\theta) + isen((n+k)\theta)] = z^{n+k}\ \forall\, n, k \in \mathbb{N}$.

b) de ejercicio.

Ejercicio 7.5. *Escriba en la forma cartesiana* $a + bi$ *el complejo* $(2\sqrt{3} + 2i)^{12}$.

8. Polinomios

Definición 8.1. *Sea* F *un cuerpo, en este curso* $F = \mathbb{R}$ *o* $F = \mathbb{C}$. *Una expresión de la forma* $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, *donde* n *es un entero no negativo y* $a_0, a_1, ..., a_n$ *son elementos en* F, *la llamaremos* ***un polinomio con coeficientes en*** F, *en la indeterminada* x.

Denotaremos por $F[x]$ al conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes en un cuerpo F, y utilizaremos los símbolos $f(x), g(x), p(x), q(x), P(x), Q(X)$, ...,etc., para denotar los elementos de $F[x]$.

Definición 8.2. *Sean* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ *elementos en* $F[x]$. *Diremos que* $p(x) = q(x)$, *si y sólo si,* $a_i = b_i$ *para todo* $i \geq 0$.

En el conjunto $F[x]$ *se definen las siguientes operaciones que originan dos nuevos polinomios:*

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots b_m x^m \text{ si } n \leq m.$$

$$(pq)(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}, \text{ donde } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Comentario. Notar que algebraicamente se tiene que $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ y que $(pq)(x) = p(x)q(x)$.

Definición 8.3. *Si* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *es un elemento en* $F[x]$ *y* $a_n \neq 0$. *Entonces* a_n *se llama coeficiente supremo o principal de* $p(x)$ *y se llama* **el grado de** $p(x)$ **al número** n. *En otras palabras, grado de* $p(x) = n \Leftrightarrow n$ *es el mayor entero no negativo tal que* $a_n \neq 0$. *Denotaremos* $n = gr(p)$ *o* $n = gr(p(x))$. *Si el coeficiente supremo es* 1 *se dice que el polinomio es mónico. No definiremos el grado del polinomio cero.*

Podemos observar que para un polinomio $f(x)$ en $F[x]$, se tiene la equivalencia: $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow gr(f(x)) \geq 0$.

Lema 8.1. *Si* $f(x)$, $g(x)$ *son elementos distintos de cero en* $F[x]$, *entonces*

i) $gr(f+g) \leq max\{gr(f), gr(g)\}$

ii) $gr(f(x)g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x))$.

Demostración Parte i) de ejercicio. Probemos parte ii) Sean $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ en $F[x]$ con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. De la definición de producto obtenemos que $f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$ donde $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$. Por lo tanto $gr(f(x)g(x)) = n + m = gr(f(x)) + gr(g(x))$.

Teorema 8.1. *(***Algoritmo de Euclides o Algoritmo de la División)** *Dados dos polinomios* $h(x)$ *y* $p(x)$ *en* $F[x]$ *con* $p(x) \neq 0$, *entonces existen únicos polinomios* $q(x)$ *y* $r(x)$ *en* $F[x]$ *tales que* $h(x) = p(x)q(x) + r(x)$ *donde* $r(x) = 0$ *o* $gr(r) < gr(h)$. *El polinomio* $r(x)$ *se llama* **resto** *y* $q(x)$ **cuociente** *de la división de* $h(x)$ *por* $p(x)$.

Demostración: Existencia: Si $h(x) = 0$, o $gr(h) > gr(p)$ tomando $q(x) = 0$ y $r(x) = h(x)$ se tiene el algoritmo. Sea $h(x) \neq 0$, y $gr(h) \leq gr(p)$. La demostración la haremos por inducción sobre el grado de $h(x)$.

Si $gr(h) = 0$, entonces $gr(p) = 0$. Sea $h(x) = a, p(x) = b,\ a \neq 0, b \neq 0$. Como K es cuerpo entonces existe $b^{-1} \in K$ y se tiene $a = b(b^{-1}a) + 0$.

Supongamos que el algoritmo es válido cuando el dividendo tiene grado $< n$. Sea $h(x)$ de grado $n, h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0$ y $p(x) = \sum_{i=0}^{t} b_i x^i$, con $b_t \neq 0$. S.P.G supongamos que $t \leq n$.

Consideremos el polinomio $S(x) = h(x) - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} p(x)$ (se obtiene del primer paso de la división de $h(x)$ por $p(x)$) y tenemos:

$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} b_t x^t - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} [\sum_{i=0}^{t-1} b_i x^i] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} [\sum_{i=0}^{t-1} b_i x^i]$

Luego $gr(S) \leq max\{gr(x^{n-1}), gr(x^{n-t} \cdot x^{t-1})\} = n - 1$.

Por lo tanto $S(x) = h(x) - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} p(x)$ es un polinomio de grado menor que n y por hipótesis de inducción: $h(x) - a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} p(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ con $r_1(x) = 0$ o $gr(r_1 < gr(p)$. Sea $q(x) = a_n b_{t-1}^{-1} x^{n-t} + q_1(x)$ y se tiene que el algoritmo vale para $h(x)$. Luego por P.I.C. el algoritmo vale para polinomios de grado n, con $n \in \mathbb{N}$.

Unicidad: Sean $h(x) = p(x)q(x) + r(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ con $r(x) = 0$ o bien $gr(r) < gr(p)$, y $r_1(x) = 0$ o bien $gr(r_1) < gr(p)$.

Supongamos que $q_1(x) \neq q(x)$. Entonces $p(x)[q_1(x) - q(x)] = r(x) - r_1(x)$. con $gr(r - r_1) < gr(p)$.

Por otro lado $gr(p[q_1 - q]) = gr(p) + gr(q_1 - q) \geq gr(p)$. Contradicción. Luego $q_1(x) = q(x)$ y también $r(x) = r_1(x)$.

Ejercicio 8.1. *Encuentre el cuociente y el resto de dividir: a)* $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ *por* $g(x) = x^2 + 2$. *b)* $f(x) = x^3 - ix^2 + 6i$ *por* $x^2 + 2$.

Nota: Si el divisor $g(x)$ es de la forma $x - c$ (de grado uno) la división se hace con un método conocido como **Método de Ruffini:** Se escriben los coeficientes de $f(x)$ en orden decreciente llenando con 0 si no aparece x^i. Por ejemplo divida $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3$ por $x + 2$.

Sol:

	1	3	-2	0	3
-2		-2	-2	8	-16
	1	1	-4	8	$-13 =$ resto

Luego $r(x) = -13$ y $q(x) = 8 - 4x + x^2 + x^3$.

Definición 8.4. *Sea $f(x)$ un polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes en F y α un número tal que $f(\alpha) = 0$, entonces se dice que α es una raíz de $f(x)$.*

Definición 8.5. *Sean $f(x)$, $g(x)$ en $F[x]$ con $f(x)g(x) \neq 0$. Diremos que $g(x)$* ***divide a o es un divisor de*** *$f(x)$ (se denota $g(x) \mid f(x)$), si existe un polinomio $h(x) \in F[x]$ tal que $f(x) = g(x)h(x)$.*

Proposición 8.1. *Sea $f(x)$ un polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes en F y $\alpha \in F$. Entonces α es una raíz de $f(x)$ si y sólo si existe un polinomio $q(x)$ en $F[x]$ tal que $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, es decir, $f(x) \mid (x - \alpha)$*

Demostración: Por el algoritmo de Euclides, sabemos que existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = (x-\alpha)q(x)+r(x)$ donde $r(x) = 0$ o $gr(r) < gr(x-\alpha) = 1$. Así $r(x) = 0$ o $gr(r) = 0$, lo cual implica que $r(x) = a_0 \in F$. Dado que α es una raíz de $f(x)$, obtenemos que $0 = f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha)+r(\alpha) = r(\alpha)$. Por lo tanto $a_0 = 0$ y $f(x) = (x-\alpha)q(x)$. Recíprocamente, tenemos que $f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0$. Por lo tanto α es raíz de $f(x)$.

Ejercicio 8.2. *Sabiendo que -1 y $\frac{1}{3}$ son raíces de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ encuentre las otras dos raíces.*

Definición: Diremos que una raíz $\alpha \in F$ de un polinomio no constante $f(x) \in F[x]$, tiene mutiplicidad $m \geq 1$, si existe un polinomio $q(x) \in F[x]$ tal que $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$.

Ejemplo 8.1. *Determine el valor de k para que el polinomio $p(x) = x^3 - kx^2 + 48x - 36 \in \mathbb{R}[x]$, tenga una raíz real de multiplicidad 2.*

Solución: Si a es raíz de multiplicidad 2, entonces $p(x) = (x-a)^2 q(x)$ con $q(a) \neq 0$. Al dividir $p(x)$ por $(x-a)^2 = x^2+2ax+a^2$ da un cuociente $q(x) = x-(k+2a)$ y un resto $r(x) = (2ak+3a^2+48)x + (ka^2+2a^3-36)$. Luego $r(x) = 0$ si y solo si $2ak+3a^2+48 = 0$ y $ka^2+2a^3-36 = 0$. Resolviendo el sistema queda $k = \frac{-96a-108}{a^2}$. Notemos que $a \neq 0$, pues si fuera cero, entonces $0 = p(0) = -36$. Lo que es una contradicción. Además $q(a) = a - (\frac{12}{a} + 2a) = -a - \frac{12}{a} = -\frac{a^2+12}{a} \neq 0$, dado que $a^2 + 12 > 0$.

Observación: Note que si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, y si $z \in \mathbb{C}$, es una raíz no real de $f(x)$ entonces $\overline{z}$ es también una raíz de $f(x)$.

Teorema 8.2. Teorema Fundamental del Algebra. *Si $f(x)$ es un polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes en el cuerpo de los números complejos, entonces $f(x)$ tiene a lo menos una raíz en $\mathbb{C}$.*

Ejemplo 8.2. *Por ejemplo $(x-\sqrt{3}) \mid (x^2-3))$ pues $x^2-3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$*

Ejercicio 8.3. *Sabiendo que -1 es raíz de $f(x) = x^3-x^2-5x-3$ de multiplicidad 2, encuentre las otras raíces.*

Ejercicio 8.4. *Encuentre todas las raíces de $f(x) = x^4-1$ a) en $\mathbb{R}$ b) en $\mathbb{C}$.*

Ejercicio 8.5. *Encuentre un polinomio de grado 4 que tenga por raíces $-3i, 2i$.*

A continuación enunciaremos una forma de encontrar las posibles raíces racionales de un polinomio, que no probaremos aquí pero que puede consultarse en Fraleigh: A first course in Abstrac Algebra.

Proposición 8.2. *Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0, a_n \neq 0$. Si un número racional $\frac{p}{q}$ es raíz de $p(x)$ entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.*

Ejercicio 8.6. *Pruebe que $h(x) = x^4-2x^2+8x+1$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.*

9. Funciones Trigonométricas Inversas

Definimos funciones trigonométricas que llamaremos *inversas* de las funciones trigonométricas, aunque en realidad son inversas de funciones que se definen y coinciden con las trigonométricas en un subdominio del dominio de las trigonométricas normales.

Proposición 9.1. *La función* $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to [-1, 1]$ *dada por* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *es biyectiva.*

Definimos la inversa de esta función:

Definición 9.1. *La función* Arcoseno *(inversa principal de la función seno) se define por* $\operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *dada por*

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \leftrightarrow x \in [-1, 1] \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge x = \operatorname{sen}(y)$$

Ejemplo 9.1. *1.* $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ***ya que*** $\frac{1}{2} \in [-1, 1]$, $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2. $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = -\frac{\pi}{4}$ ***ya que*** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

De forma análoga tenemos:

Definición 9.2. *1. La función Arcocoseno (inversa principal de la función coseno) se define por* $\operatorname{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *dada por*

$$y = \operatorname{Arccos}(x) \leftrightarrow x \in [-1, 1] \wedge y \in [0, \pi] \wedge x = \cos(y)$$

2. La función Arcotangente (inversa principal de la función tangente) se define por $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ *dada por*

$$y = \operatorname{Arctan}(x) \leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \wedge x = \tan(y)$$

3. La función Arcosecante *(inversa principal de la función secante) se define por* $\operatorname{Arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *dada por*

$$y = \operatorname{Arcsec}(x) \leftrightarrow |x| \geq 1 \wedge y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \wedge x = \sec(y)$$

Proposición 9.2. *1. Para todo* $|x| \leq 1$ *se tiene* $\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Para todo $|x| \leq 1$ *se tiene* $\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = +\sqrt{1-x^2}$.

3. Para todo $|x| \leq 1$ *se tiene* $\operatorname{sen}(\operatorname{Arccos}(x)) = +\sqrt{1-x^2}$.

4. Para todo $|x| \leq 1$ *se tiene* $\operatorname{arc\,sen}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Ahora nos interesan las derivadas de estas funciones:

Proposición 9.3. *1. Para todo* $|x| < 1$ *se cumple* $\left(\operatorname{arc\,sen}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. Para todo $|x| < 1$ *se cumple* $\left(\operatorname{Arccos}(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ *se cumple* $\left(\operatorname{Arctan}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

4. Para todo $|x| \geq 1$ *se cumple* $\left(\operatorname{Arcsec}(x)\right)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Ejemplo 9.2. *Para integrar* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-9x^2}}$, *factorizamos el denominador por* $\sqrt{5}$ *y obtenemos* $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{5}}}$ *y usamos sustitución simple con* $u = \frac{3}{\sqrt{5}}x$; *entonces* $du = \frac{3}{\sqrt{5}}dx$. *Luego se tiene* $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(u) + K = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x\right) + K$ *para* $x \in \left]-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right[$, *ya que* $\left|\frac{3}{\sqrt{5}}x\right| < 1$

Como consecuencia de las derivadas de las trigonométricas inversas, obtenemos las siguientes integrales:

Proposición 9.4. *1. Para* $|x| < 1$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen}(x) + K$$

2. Para $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{Arctan}(x) + K$$

3. Para $|x| \geq 1$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{Arcsec}(|x|) + K$$

Ejemplo 9.3. *Calcule* $\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}dx$

Solución: Al completar cuadrados queda $3x-x^2 = -[x^2-3x] = -[(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2] = (\frac{3}{2})^2 - (x-\frac{3}{2})^2$ una integral del tipo $a^2-u^2, u = x-\frac{3}{2}$.

Ejemplo 9.4. *Calcule* $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ \ |x| < 1.$

Solución: Sea $x = sen(\theta)$, luego dx = $cos(\theta)d\theta$. Por lo tanto

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sen^2(\theta)cos(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}}dx = \int sen^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int(1-cos(2\theta))d\theta = \frac{1}{2}[\theta-\frac{1}{2}sen(\theta)+c] = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen(\theta) + k, \ k \in \mathbb{R} = \frac{1}{2}Arcsen(x) - \frac{1}{4}x + k, \ k \in \mathbb{R}$

Método de sustituciones trigonométricas.

Se usan al trabajar con integrales que tienen expresiones algebraicas tales como $a^2-x^2, \ x^2-a^2, \ a^2+x^2, \ a \in \mathbb{R}$.

1. Para a^2-x^2, se usa: $x = a \ \text{sen}(\theta), \ dx = a\cos(\theta)$
2. Para x^2+a^2, se usa: $x = a \ \tan(\theta), \ dx = a\sec^2(\theta)$
3. Para x^2-a^2, se usa: $x = a \ \sec(\theta), \ dx = a\sec(\theta)\tan(\theta)$

Ejemplo 9.5. *Calcule* $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \ dx.$

Solución: Sea $x = sen(\theta)$, luego dx = $cos(\theta)d\theta$. Si $x = 0$ entonces $\theta = 0$, y si $x = 1$ entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen^2(\theta)cos(\theta)}{\sqrt{1-sen^2(\theta)}} \ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2(\theta) \ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos(2\theta)) \ d\theta = \frac{1}{2}[\theta - \frac{1}{2}sen(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}.$

10. Fracciones racionales y descomposición en fracciones parciales

Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x)\ \mathbb{R}[x], q(x) \neq 0$. Se puede probar que

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + F_1(x) + \cdots + F_t(x),$$

donde $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ y cada $F_i(x)$ es de la forma $\frac{A}{(ax+b)^n}$, con $A, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, o de la forma $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^t}$, con $A, B, a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b^2 - 4ac\ <\ 0$.

Se basa en que todo polinomio no nulo $q(x)$ se factoriza en $\mathbb{R}[x]$ como $q(x) = ap_1(x)^{n_1} \cdots p_t(x)^{n_t}$ donde $p_i(x)$ no es factorizable en $\mathbb{R}[x]$ en forma no trivial, es decir, $p_i(x) = a_i x + b_i, a_i \neq 0$ o $p_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, a_i \neq 0,\ b_i^2 - 4a_i c_i\ <\ 0$.

Sea $r(x) = \frac{p_1(x)}{q(x)}$, $p_1(x), q(x)\ \mathbb{R}[x], q(x) \neq 0$, grado$(p_1(x))\ <$ grado$(q(x))$.

Caso 1. $q(x) = (ax + b)^n$, entonces

$\frac{p_1(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$

Caso 2. $q(x) = (ax + b)^n(cx + d)^t$, entonces

$\frac{p_1(x)}{(ax+b)^n(cx+d)^t} = \frac{A_1}{ax+b} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n} + \frac{B_1}{cx+d} + \cdots + \frac{B_t}{(cx+d)^t}$

Así sucesivamente con más factores lineales.

Caso 3. $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n,\ b^2 - 4ac\ <\ 0$ entonces

$\frac{p_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Caso 4. $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n(dx + e)^t,\ b^2 - 4ac\ <\ 0$ entonces

$\frac{p_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n(dx+e)^t} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{C_1}{dx+e} + \cdots + \frac{C_t}{(dx+e)^t}$

Así sucesivamente con más factores cuadráticos y lineales.

Caso 5. $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n(dx^2 + ex + f)^t,\ b^2 - 4ac\ <\ 0,\ e^2 - 4df\ <\ 0$ entonces

$\frac{p_1(x)}{(ax^2+bx+c)^n(dx^2+ex+f)^t} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{C_1x+D_1}{dx^2+ex+f} + \cdots + \frac{C_tx+D_t}{(dx^2+ex+f)^t}$

Así sucesivamente con más factores cuadráticos.

Ej. Calcule $a)\ \int \frac{x^2+x+2}{x(x-1)^2}\,dx,\ \ b)\ \int \frac{4x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}\,dx$

Solución: $\frac{x^2+x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C_1}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2+B_1x(x-1)+C_1x}{x(x-1)^2}$

Luego, $x^2 + x + 2 = A_1(x - 1)^2 + B_1x(x - 1) + C_1x$. Para calcular A_1, B_1, C_1 se desarrolla el segundo miembro de la ecuación y se igualan los coeficientes de ambos

polinomios o si no se dan valores a x de manera de tener tres ecuaciones independientes. Veamos esta segunda opción.

$(x=0),\ \ 2=A_1$

$(x=1),\ \ 4=C_1$

$(x=-1),\ \ 2=4A_1+2B_1-C_1$

Reemplazando A_1, C_1 obtenemos que $2=8+2B_1-4$, de donde $B_1=-1$. Luego $\frac{x^2+x+2}{x(x-1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$ y

$$\int \frac{x^2+x+2}{x(x-1)^2}\,dx=\int[\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}]\,dx=2ln|x|-ln|x-1|-4(x-1)^{-1}+c.$$

b) $\frac{4x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}=\frac{A_1x(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(B_1x+C_1)x^2}{x^2(x^2+1)}$. De donde,

$4x^2+5x+3=A_1x(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(B_1x+C_1)x^2$

$(x=0),\ \ 3=A_2$

$(x=1),\ \ 12=2A_1+2A_2+(B_1+C_1)=2A_1+6+(B_1+C_1)$, de donde

$$6=2A_1+B_1+C_1\ (1)$$

$(x=-1),\ \ 2=4A_1+2A_2+2B_1-C_1=4A_1+6+2B_1-C_1$, de donde

$$-4=4A_1+2B_1-C_1\ (2)$$

$(x=-2,\ \ 9=-10A_1+5A_2-2B_1+C_1=-10A_1+15-2B_1+C_1$, de donde

$$-6=-10A_1-2B_1+C_1\ (3)$$

(1) + (2): $2=6A_1+B_1$

(2) + (3): $-10=-6A_1$. Luego $A_1=\frac{5}{3}$, luego $B_1=2-6A_1=2-\frac{30}{3}=-8$. De (1) se tiene que $C_1=6-2\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$

Luego: $\frac{4x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}=\frac{\frac{5}{3}}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{-8x+\frac{8}{3}}{x^2+1}$

$\int \frac{4x^2+5x+3}{x^2(x^2+1)}\,dx=\int[\frac{\frac{5}{3}}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{-8x+\frac{8}{3}}{x^2+1}]\,dx=\frac{5}{3}ln|x|-3x^{-1}-4ln|x^2+1|+\frac{8}{3}Arctan(x)+c.$

11. Series de potencias y serie de Taylor

11.1. Series de potencias

Definición 11.1. *Sean $c, x \in \mathbb{R}$. Se llama* **serie de potencias centrada en c o en torno a** *c a una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Tenemos tres posibilidades:

i) La serie de potencias converge solamente en c.

ii) La serie de potencias converge para todo x en $\mathbb{R}$.

iii) Existe R en $\mathbb{R}^+$ tal que la serie converge absolutamente si $|x-c| < R$ y diverge si $|x-c| > R$. R se llama **el radio de convergencia de la serie.**

En el caso i) se dice que $R = 0$ y en el caso ii) se dice que R es infinito.

El conjunto de todos los valores de x donde la serie es convergente se llama **el intervalo de convergencia de la serie.** Se deben analizar también los extremos del intervalo.

Ejemplo 11.1. *Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k}$.

Solución: Del criterio del cuociente se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}| \left|\dfrac{1}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \dfrac{n4^n}{x^n}\right| = \dfrac{|x|}{4} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{|x|}{4} < 1.$

Luego, la serie converge absolutamente (luego converge) para $|x| < 4$. Por lo tanto el radio de convergencia es $R = 4$.

Intervalo de convergencia: $(-4, 4)$. Falta analizar los extremos.

i) Sea $x = 4$. Entonces se tiene la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, que es la serie armónica, que diverge.

ii) Sea $x = -4$. Entonces se tiene la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, que por criterio de series alternada converge.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k}$ es $[-4, 4)$.

Nota: Si una función f está representada pou una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ en un intervalo de convergencia $(c-R, c+R)$, entonces

i) la serie derivada $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ tiene tambien intervalo de convergencia $(c-R, c+R)$.

ii) la integral término a término $\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + k$ tiene también intervalo de convergencia $(c-R, c+R)$. En particular $\int_c^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$.

Ejemplo 11.2. *Encuentre una representación en serie de potencias de:*

i) $ln(x+1)$, *ii)* $Arcotan(x)$.

Solución: i) Se tiene que $ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$. Ahora bien para $|x| < 1$, se tiene que la serie geométrica $1 + x + x^2 + \cdots + x^n +$ converge a $\frac{1}{1-x}$

Al reemplazar x por $-t$ en lo anterior tenemos:

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$

Luego, para $|x| < 1$, $ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$

ii) Se tiene que $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

Pero $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots$,

luego, para todo $x, |x| < 1$, $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots)\, dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

11.2. Series de Taylor y de Maclaurin

Sea f función infinitamente derivable. Entonces se puede construir la serie centrada en c,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

donde $f^{(0)} = f(c),\ f^{(1)}(c) = f'(c),\ \ f^{(n)}(c)$ es la $n-$ésima derivada de f en c. Se la llama una expansión en **serie de Taylor para** f. Para el caso $c = 0$ se habla de una expansión en **serie de Maclaurin para** f.

¿ Una serie construida de esta forma converge ? En ese caso ¿Cuál es su radio de convergencia ? Si la serie converge a una función, ¿ Podría ser f ?

Ejemplo 11.3. *Encuentre la serie de Maclaurin de i)*$f(x) = e^x$.

Solución: i) Se tiene que $f^{(n)}(c) = e^c$ para todo n y $f^{(n)}(0) = 1$, para todo n. Luego la serie de Maclaurin de f es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Por el criterio del cuociente se tiene que

$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}||\frac{1}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

¿Como saber si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ converge a e^x para todo $x \in \mathbb{R}$?

Nota: Las sumas parciales de una serie de Taylor (respectivamente de Maclaurin) son polinomios $P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ y se les llama **polinomios de Taylor de grado** n **para** f (respectivamente **de Maclaurin de grado** n **para** f**)**.

Teorema 11.1. *Suponga que* f *tiene* $n+1$ *derivadas en el intervalo abierto* $(c-R, c+R)$, *para algún* $R > 0$. *Entonces para* $x \in (c-R, c+R),\ \ f(x) \sim P_n(x)$ *y el error en usar* $P_n(x)$ *para aproximar* $f(x)$ *es*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

para algún z *entre* x *y* c.

Teorema 11.2. *Suponga que f tiene derivadas de todos los órdenes en el intervalo abierto $(c-R, c+R)$, para algún $R > 0$ y $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo $x \in (c-R, c+R)$. Entonces la serie de Taylor centrada en c para f converge a $f(x)$, es decir, para todo $x \in (c-R, c+R)$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Ejercicio 11.1. *Demuestre que la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$ centrada en 0 converge a e^x.*

Solución: Sabemos que la serie de Maclaurin pedida es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ y converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Debemos probar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo x. Pero

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}(x)^{n+1},$$

donde z está entre x y 0. Veamos primero una cota para e^z.

i) Si $x > 0$, entonces $0 < z < x$ y $e^z < e^x$.

ii) Si $x \leq 0$, entonces $x \leq z \leq 0$ y asi $e^z < e^0 = 1$.

Sea entonces $M = max\{e^z, 1\}$ y asi, $e^z \leq M$ y la estimación del error da

$$|R_n(x)| = \frac{e^z}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Debemos probar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo x, o sea que $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ pero este término es el n-ésimo término de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{j+1}}{(j+1)!}$ que es convergente por el criterio del cuociente.

Ejercicio 11.2. *Demuestre que la serie de Taylor centrada en 1 de $ln(x)$ es*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots$$

y su intervalo de convergencia es $(0, 2)$.

Ejemplo 11.4. *Encuentre el número de términos en la serie de Taylor centrada en 1 de $ln(x)$ que garantizará una exactitud de por lo menos 10^{-10} en la aproximación de $ln(1, 1)$.*

Solución: Se tiene que el error $|R_n(1,1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1,1-1)^{n+1}\right| = \frac{n!|z|^{-n-1}}{(n+1)!}(0,1)^{n+1} = \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}} < \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)}$ pues $1 < z < 1,1$ implica que $\frac{1}{z} < 1$.

Como queremos que el error sea menor que 10^{-10}, se requiere que $|R_n(1,1)| < \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)} < 10^{-10}$.

Por ensayo con distintos n se llega que $n = 9$ garantiza la desigualdad requerida. Se tiene entonces la aproximación:

$ln(1,1) \sim P_9(1,1) = \sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k == (0,1) - \frac{1}{2}(0,1)^2 + \frac{1}{3}(0,1)^3 - \cdots + \frac{1}{9}(0,1)^9 \sim 0,095310179813.$

Ejercicio 11.3. *Demuestre que los valores de* $\text{sen}(x)$ *para ángulos comprendidos entre* 40^0 *y* 50^o *puede calcularse mediante la aproximación*

$$\text{sen}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2\right].$$