Índice

MATEMATICA II

SEGUNDO SEMESTRE 2010

1. DERIVADAS

Dados $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$ se quiere la mejor aproximación al gráfico de f en c por una recta.

Para conocer dicha recta basta conocer su pendiente m_c ya que tal recta contiene al punto de tangencia $\big(c, f(c)\big)$.

Para $0 \neq h$ pequeño se considera la recta que pasa por los puntos $(c, f(c))$ y por $(c+h, f(c+h))$. La pendiente de tal recta es

$$m_{c,h} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

La pendiente que se quiere m_c se aproxima por las pendientes $m_{c,h}$ cuando $h \to 0$. Así, $m_c = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

Definición 1.1. La derivada de una función f *es una función* f' *definida por* $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *para todo* x *donde exista este límite.*

Observación 1.1. *Note que si* f *no está definida a un lado del punto* x*, en la definición de derivada es válido considerar el límite lateral que esté bien definido.*

Observación 1.2. *Forma alternativa de la derivada (cambio de varaible): Sea* $y = x + h$, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. *Entonces,* $f'(x) = \lim_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Se dice que f es derivable en c o diferenciable en c si existe $f'(c)$.

Proposición 1.1. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$. *Si* f *es diferenciable en* c *entonces* f *es continua en* c.

Demostración: Como f es diferenciable en c, existe $f'(c)$ y se tiene $f'(c) = \lim_{y \to c} \dfrac{f(y) - f(c)}{y - c}$. Por otro lado f continua en $c \iff \lim_{x \to c} f(x) = f(c) \iff$

$\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = 0$. Ahora bien, $\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ \lim_{x \to c}(x - c) = f'(c) \lim_{x \to c}(x - c) = 0$.

Observación 1.3. *En particular si la función f es diferenciable en un intervalo (a, b) entonces f es continua en (a, b).*

Encuentre un contraejemplo para ver que hay funciones continuas en c que no son diferenciables en c.

Ejercicio 1.1. *Sea $c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to c$ función constante. Entonces $\forall \ \ x \in (a, b) \ \ f'(x) = 0$.*

Ejercicio 1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^n$ función entonces $\forall \ x \in \mathbb{R} \ \ f'(x) = nx^{n-1}$.*

Ejemplo 1.1. $\forall \ x \in \mathbb{R} \ sen'(x) = cos(x), \ \wedge \ cos'(x) = -sen(x)$.

Solución: $sen'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x + h) - sen(x)}{h} =$
$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)sen(h) - sen(x)[1 - cos(h)]}{h} = \lim_{h \to 0}[cos(x)\frac{sen(h)}{h} - sen(x)\frac{1 - cos(h)}{h}] = cos(x) \ \lim_{h \to 0} \ \frac{sen(h)}{h} - sen(x) \ \lim_{h \to 0} \ \frac{1 - cos(h)}{h} = cos(x) \cdot 1 - sen(x) \cdot 0 = cos(x)$.

En forma similar se prueba que $\forall \ x \in \mathbb{R} \ cos'(x) = -sen(x)$.

1.1. Operatoria de derivadas

Observación 1.4. *Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, funciones diferenciables en $c \in (a, b)$. Entonces*

1. $(\lambda f(c))' = \lambda(f'(c))$.

2. $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$.

3. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}, \;\; g(c) \neq 0.$

Ejemplo 1.2. *Pruebe que* $tan'(x) = sec^2(x)$.

Solución: $tan'(x) = (\frac{sen(x)}{cos(x)})' = \frac{sen'(x)cos(x) - sen(x)cos'(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos(x)cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$.

Proposición 1.2 (Derivada de la función compuesta o regla de la cadena.)**.** *Sean* $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* $f(I) \subseteq J$ *y sea* $c \in I$. *Si* f *es diferenciable en* c *y* g *es diferenciable en* $f(c)$ *entonces* $g \circ f$ *es diferenciable en* c *y* $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$.

Demostración: $(g \circ f)'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(g \circ f)(c+h) - (g \circ f)(c)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{f(c+h) - f(c)} \, \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(g(f(c+h)) - (g(f(c))}{f(c+h) - f(c)} \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{y \to f(c)} \frac{g(y) - (g(f(c))}{y - f(c)} \, f'(c)$$

$= g'(f(c))f'(c), \;\; y = f(c+h)$

Ejemplo 1.3. *1. Sea* $n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Sea $n \in \mathbb{Z}$, *entonces* $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ *entonces* $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

Solución: 1.- Ya sabemos que $\forall \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; ((x^n)' = nx^{n-1})$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$. Tenemos que $(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = \frac{-1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$. Luego, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

2.- Probemos que $\forall \;\; n \in \mathbb{N} \;\; ((x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}n)$. Sea $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ y $h(x) = x^n$. Entonces, $(h \circ g)(x) = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$, luego $(h \circ g)'(x) = x' = 1$, es decir, $h'(g(x))g'(x) = 1$. Pero $h'(u) = nu^{n-1}$, luego $h'(g(x))g'(x) = 1$ implica que $n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}g'(x) = 1$, o sea, $1 = nx^{1-\frac{1}{n}}g'(x)$, de donde $g'(x) = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ Luego, $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

3.- Sea $f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^m$. Luego, $f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(x^{\frac{1}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. Luego, $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

Ejemplo 1.4. *Encuentre* $a)[(5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}})^{10}]'$, $b)$ $[5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}]'$ $c)$ $[cos^2(\sqrt{x}+5x^4)]'$.

Solución: a) Sea $f(x) = (5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}})^{10}$, entonces $f'(x) = 10[5x + (3x - 1)^{\frac{4}{3}}]^9(5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}})' = 10[5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}}]^9[5+\frac{4}{3}(3x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot 3 = 10[5x+(3x-1)^{\frac{4}{3}}]^9[5+4(3x-1)^{\frac{1}{3}}$.

b) Sea $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$, entonces $f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{-1}{3}}(2-x) = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$.

c) Sea $f(x) = cos^2(\sqrt{x}+5x^4)$, entonces $f'(x) = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(cos(\sqrt{x}+5x^4))' = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(-sen(\sqrt{x}+5x^4))(\sqrt{x}+5x^4)' = 2cos(\sqrt{x}+5x^4)(-sen(\sqrt{x}+5x^4))(\frac{1}{2\sqrt{x}}+20x^3)$.

2. Aplicaciones de la derivada

Teorema del Valor Medio. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el abierto (a,b). Entonces, existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Note que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El teorema establece que hay una recta tangente en el segmento de curva que tiene la misma pendiente de la recta anterior.

Aplicaciones del Teorema del Valor Medio.

1.) Si $\forall x \in [a,b]$ $(f'(x) = 0)$ entonces f es constante en $[a,b]$.

En efecto, apliquemos Teorema del Valor Medio al intervalo $[a,x]$ para cualquier x en $\mathbb{R}$ tal que $a < x \leq b$. Como f es continua en $[a,x]$ y diferenciable en (a,x), debe existir $c \in [a,x]$ tal que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pero $f'(c) = 0$, por lo cual $\forall x \in (a,b]$ $(f(x) = f(a))$. Además $f(a) = f(a)$. Luego, $\forall\, x \in [a,b]$ $(f(y) = f(a))$.

2.) Sean f, g funciones tales que $\forall\, x \in [a,b]$ $f'(x) = g'(x)$. Entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in [a,b]$ $(f(x) = g(x)+k)$. Para probar esto, aplique lo anterior a $h := f-g$.

2.1. Funciones crecientes y decrecientes

f se dice **creciente en el intervalo** I si

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ (x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$$

f se dice **decreciente en el intervalo** I si

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ (x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2))$$

Proposición 2.1. Criterio para funciones crecientes o decrecientes.

a) Si $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) > 0)$, *entonces* f *es creciente en* $[a,b]$.

b) Si $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) < 0)$, *entonces* f *es decreciente en* $[a,b]$.

Dem. Supongamos que $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) > 0)$. Sean $u, v \in [a,b]$ tales que $u < v$. Por TVM aplicado a $[u,v]$, pues $[u,v] \subseteq [a,b]$ se tiene que hay $c \in (u,v)$ tal que $f'(c) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. Como $u < v$ y $f'(c) > 0$, se tiene que $f(v) - f(u) > 0$, o sea $f(u) < f(v)$ que es lo que se quería probar. En forma similar se procede para probar que $\forall\, x \in (a,b)\ (f'(x) < 0)$ implica que f es decreciente en $[a,b]$.

2.2. Máximos y mínimos de funciones

Definición 2.1 (Extremos relativos o locales de una función)**.** *Sea* f *función y sea* c *punto interior de* $dom(f)$.

1. $f(c)$ **es un mínimo local de** f *ssi existe intervalo abierto* I *con* $c \in I \subseteq dom(f)$ *tal que* $f(c) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

2. $f(c)$ **es un máximo local de** f *ssi existe intervalo abierto* I *con* $c \in I \subseteq dom(f)$ *tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Proposición 2.2. *Si* $f(c)$ *es un máximo local o un mínimo local de* f, *entonces* $f'(c) = 0$ *o* $f'(c)$ *no existe.*

En efecto, la función valor absoluto tiene un mínimo local en 0, pero no es diferenciable en 0, por lo que el caso en que $f^{'}(c)$ no existe es posible para lo afirmado. Por otra parte, si f es diferenciable en c pero suponemos que $f^{'}(c) \neq 0$, entonces o bien $f^{'}(c) > 0$ o bien $f^{'}(c) < 0$.

Si $f'(c) > 0$, entonces $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. Es decir, hay intervalo (a, b) tal que $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ para todo $x \neq c$ en (a, b). Luego numerador y denominador deben tener igual signo, es decir,

$x < c$ y $f(x) < f(c)$. Luego $f(c)$ no es un mínimo en (a, b).

$x > c$ y $f(x) > f(c)$. Luego $f(c)$ no es un máximo en (a, b).

Luego $f(c)$ no es extremo si $f'(c) > 0$. En forma similar se prueba que $f'(c) < 0$ entonces $f(c)$ no es extremo. Luego la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Observación 2.1. *Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado entonces los máximos locales o los mínimos locales de f en I se encuentran entre los valores $f(a), f(b)$ o $f(c)$ con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.*

Punto crítico de f en I (abierto) es un punto $c \in dom(f)$ tal que i) $f'(c) = 0$ o ii) $f'(c)$ no existe

Si f tiene un extremo en c entonces c es un punto crítico de f.

Extremos globales o absolutos de una función: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ función con dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. Sea $c \in D$,

1.- $f(c)$ **es un mínimo global de** f si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$.

2.- $f(c)$ **es un máximo global de** f si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$.

Criterio de la primera derivada: Sea c un punto crítico de una función f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Si f es diferenciable en (a, b) excepto quizás en c, entonces:

1.- Si $\forall\ x \in (a, c)\ (f'(x) < 0)$ y $\forall\ x \in (c, b)\ (f'(x) > 0)$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.

2.- Si $\forall\ x \in (a,c)\ (f'(x) > 0)$ y $\forall\ x \in (c,b)\ (f'(x) < 0)$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.

3.- Si f' no cambia de signo en torno a c, $f(c)$ no es máximo ni mínimo.

Ejercicio 2.1. *Encuentre los intervalos de crecimiento y los extremos de la función $f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$. Dibuje.*

Observación 2.2. *Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto $I \subseteq dom(f)$ cuando para cada par de puntos de la gráfica $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, con a y b en I, el segmento que une ambos puntos está sobre la gráfica.*

Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto $I \subseteq dom(f)$ cuando para cada par de puntos de la gráfica $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, con a y b en I, el segmento que une ambos puntos está bajo la gráfica.

Observación 2.3. *Se dice que una función f tiene segunda derivada si $f^{'}$ es diferenciable.*

Proposición 2.3. *Sea f una función con segundas derivadas en un intervalo I. Entonces:*

1. *f es cóncava hacia arriba en I ssi $\forall x \in I\,(f''(x) \geq 0)$*

2. *f es cóncava hacia abajo en I ssi $\forall x \in I\,(f''(x) \leq 0)$*

Gracias a esa caracterización, obtenemos:

Criterio de la segunda derivada: Sea f función dos veces derivable en un intervalo abierto I, c un punto en I tal que $f'(c) = 0$. Entonces:

1.- Si $\forall\ x \in I\ (f''(x) > 0)$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f en I.

2.- Si $\forall\ x \in I\ (f''(x) < 0)$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de $f$en I.

Punto de inflexión de f es un punto $c \in dom(f)$ tal que f cambia de concavidad en torno a ese punto. En un punto de inflexión c de una función f con segundas derivadas en torno a c, se tiene que f'' cambia de signo en torno a c, tanto si $f''(c) = 0$ como si $f''(c)$ no existe

Ejercicio 2.2. *i) Haga un estudio completo de la curva* $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$

ii) Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L*. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínima tiene lados de longitud* $\frac{1}{2}L\sqrt{2}$

2.3. Trazado de curvas y asíntotas verticales y horizontales

Además de los criterios ya vistos para ayudar a graficar funciones veremos las asíntotas verticales y horizontales. Que son rectas que se aproximan progresiva e indefinidamente a la gráfica de la función f.

La recta de ecuación $x = c$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o si} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

La recta de ecuación $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{o si} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 2.1. *Indique asíntotas verticales y horizontales, si las hay de la curva* $y = \frac{x}{x-8}$

La recta $x = 8$ es una asíntota vertical pues $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = \infty$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal pues $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

Ejercicio 2.3. *Haga un estudio completo incluidas asíntotas verticales y horizontales, si las hay, de la curva* $y = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$

2.4. Regla de L'Hôpital

Para el cálculo de algunos límites por ejemplo

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{x - tan(x)}{sen(x)}, \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{sen(x)}, \quad c) \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5}$$

que involucran funciones diferenciables hay una forma importante que se llama Regla de L'Hôpital, aplicable en algunos casos como los anteriores.

Regla de L'Hôpital: Sean f y g funciones reales diferenciables en un intervalo abierto I, salvo, tal vez, en un punto $c \in I$, Suponga también que $\forall \ x \in I, \ g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, y que $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$. Entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista.

Otra variante de la Regla de L'Hôpital: Sean f y g funciones reales tales que f y g son direnciables en un intervalo abierto de la forma $I = (c, \infty)$. Suponga también que $\forall \ x \in I, \ g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista.

Nota. La regla de L'Hôpital también se puede utilizar cuando

$$(\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty) \text{ y cuando } (\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty)$$

Ejemplo 2.2. *Para a) como* $\lim_{x\to 0} x - tan(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} sen(x) = 0$ *puedo usar L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - tan(x)}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x - tan(x))'}{(sen(x))'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - sec^2(x)}{cos(x)} = 0.$

Para b) como $\lim_{x\to 0} x^2 + x = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} sen(x) = 0$ *puedo usar L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x^2 + x)'}{(sen(x))'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x + 1}{cos(x)} = 1.$

c) Como $\lim_{x\to\infty} 3x^3 + x^2 + 3 = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} x^4 + 6x^2 + 5 = \infty$ *podemos usar la regla de L'Hôpital y tenemos* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(3x^3 + x^2 + 3)'}{(x^4 + 6x^2 + 5)'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2 + 2x}{4x^3 + 12x} = L$

Como $\lim_{x\to\infty} 9x^2 + 2x = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 12x = \infty$ *podemos usar nuevamente la regla de L'Hôpital y tenemos* $L = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(9x^2 + 2x)'}{(4x^3 + 12x)'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{18x + 2}{12x^2 + 12} = M$

Finalmente como $\lim_{x\to\infty} 18x + 12 = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} 12x^2 + 12 = \infty$ *podemos usar otra vez la regla de L'Hôpital y queda* $M = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(18x + 2)'}{(12x^2 + 12)'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{18}{24x} = 0.$

Así después de usar 3 veces la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 + 5} = 0.$$

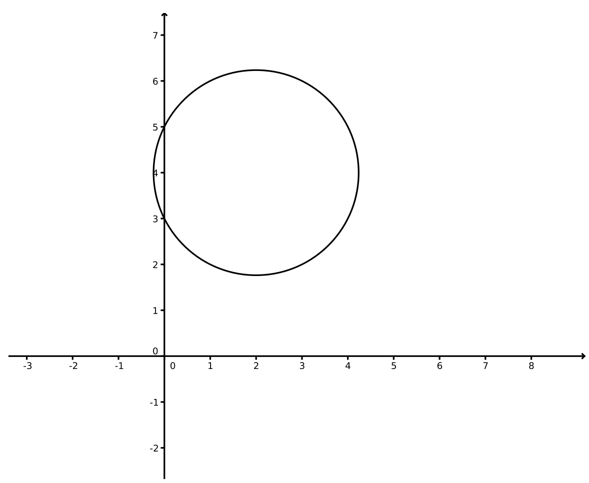
3. Cónicas

Se llaman cónicas a las curvas planas que se obtienen al interceptar un plano con un cono. Ellas son la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola En este curso veremos las ecuaciones de ellas.

Circunferencia: Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado centro.

La ecuación de una circunferencia de centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Ejemplo 3.1. *Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por* $(7, -5)$ *y el centro es el punto de intersección de las rectas* $7x - 9y - 10 = 0$ *y* $2x - 5y + 2 = 0$.

Solución: Sea $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia. Sabemos que $7h - 9y - 10 = 0$ y que $2h - 5k + 2 = 0$. Resolviendo el sistema obtenemos $h = 6, k = 2$ Luego tenemos $(x-6)^2 + (y-2)^2 = r^2$. Sabemos que $(7, -5)$ está en la circunferencia, luego $(7-6)^2 + (-5-2)^2 = r^2$. Por lo tanto $1 + 14 = r^2$, y la ecuaci'on de la circunferencia es $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 15$.

Ejercicio 3.1. *Encuentre el centro y radio de la circunferencia de ecuación* $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 15 = 0$. *Resp. Centro* $=(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ *y radio* $r = \sqrt{94/4}$

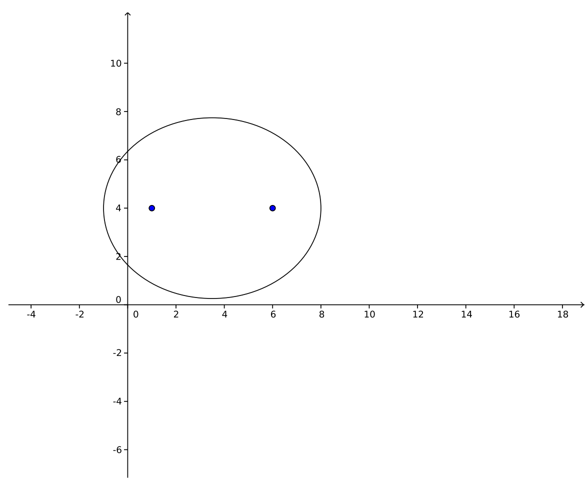
Ejercicio 3.2. *Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $(-8, 3), (4, -5)$ *y su centro está sobre la recta de ecuación* $2x - 3y - 14 = 0$. *Resp.* $(x + 8)^2 + (y - 10)^2 = 169$.

Elipse Se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante e igual a $2a$. El centro de la elipse se define como el punto medio del segmento de recta que une los focos.

i) La ecuación de una elipse de centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje X, de longitud $2a$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,\ a > b$$

Si c es la distancia del centro al foco entonces $c^2 = a^2 - b^2$. Los focos son $F_1 = (h + c, k),\ F_2 = (h - c, k)$ y los vértices $V_1 = (h + a, k),\ V_2 = (h - a, k)$.



ii) La ecuación de una elipse de centro (h, k) y eje mayor paralelo al eje Y, de longitud $2a$ es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,\ a > b$$

$c^2 = b^2 - a^2$. Los focos son $F_1 = (h, k + c),\ F_2 = (h, k - c)$ y los vértices $V_1 = (h, k + a),\ V_2 = (h, k - a)$.

Ejemplo 3.2. *Encuentre centro, focos y vértices de la elipse de ecuación* $3x^2 + 5y^2 - 12x + 30y + 42 = 0$.

Solución: Tenemos $3(x^2-4x)+5(y^2+6y)=-42$. Completando cuadrados queda $3[(x-2)^2-4]+5[(y+3)^2-9]=-42$, luego queda $3(x-2)^2+5(y+3)^2=15$, de donde la ecuación de la elipse es $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$.

Es una elipse de eje mayor horizontal de centro $(2,-3)$, $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$. Luego $c=\sqrt{2}$, focos $(h\pm c,k)=(2\pm\sqrt{2},-3))$ y vértices $(h\pm a,k)=(2\pm\sqrt{5},-3)$.

Ejercicio 3.3. *Encuentre centro, focos y vértices de la elipse de ecuación* $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$. *Resp. Centro* $(-2,3)$, *focos* $(-2,3\pm\sqrt{5})$ *y vértices* $(-2,6)$ *y* $(-2,0)$.

Ejercicio 3.4. *Encuentre la ecuación de la elipse de centro* $(0,0)$ *foco* $(2,0)$ *y vértice* $(3,0)$ *Resp.* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

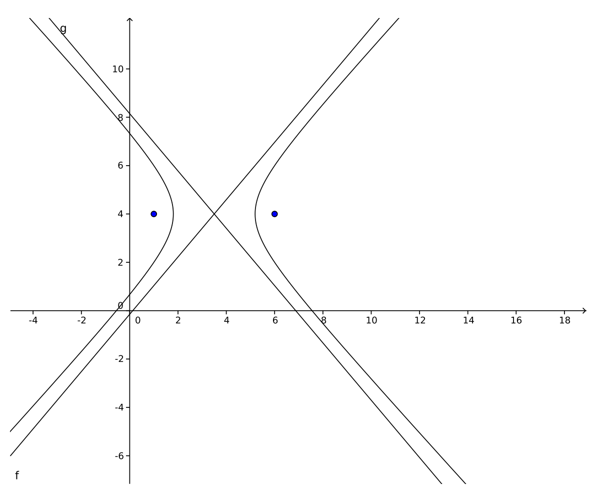
Hipérbola Se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

i) La ecuación de una hipérbola de centro (h,k) y eje transversal horizontal paralelo al eje X es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si c es la distancia del centro al foco entonces $b^2=c^2-a^2$. Los focos son $F_1=(h+c,k)$, $F_2=(h-c,k)$ y los vértices $V_1=(h+a,k)$, $V_2=(h-a,k)$.

La ecuaciones de las asíntotas son $y-k=\frac{b}{a}(x-h)$ e $y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$



ii) La ecuación de una hipérbola de centro (h,k) y eje transversal vertical o paralelo al eje Y es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

$c^2 = b^2 - a^2$. Los focos son $F_1 = (h, k+c)$, $F_2 = (h, k-c)$ y los vértices $V_1 = (h, k+a)$, $V_2 = (h, k-a)$.

La ecuaciones de las asíntotas son $y - k = \frac{a}{b}(x-h)$ e $y - k = -\frac{a}{b}(x-h)$

Ejemplo 3.3. *Determine la gráfica de ecuación* $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y = 4$.

Solución: Completando cuadrados se llega a $9(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 36$, luego se tiene la ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Luego la gráfica es una hipérbola de centro $(2,1)$ y eje principal paralelo al eje X. Como $a = 2, b = 3$ se tiene que $c = \sqrt{13}$. Luego los vértices son $(0,1)$ y $(4,1)$ y sus focos $(2+\sqrt{13}, 1)$ y $(2-\sqrt{13}, 1)$. Sus asíntotas son las rectas

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x-2),\ y - 1 = -\frac{3}{2}(x-2)$$

Ejercicio 3.5. *Encuentre la ecuación de la hipérbola de vértices* $(0,2)$ *y* $(6,2)$ *y asíntotas de ecuaciones* $y = \frac{2}{3}x$ *e* $y = 4 - \frac{2}{3}x$. *Resp.* $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

Parábola Se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice y la recta que pasa por el foco y el vértice se llama eje de la parábola.

i) La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje vertical es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

directriz, la recta de ecuación: $y = k - p$ y foco $(h, k+p)$.

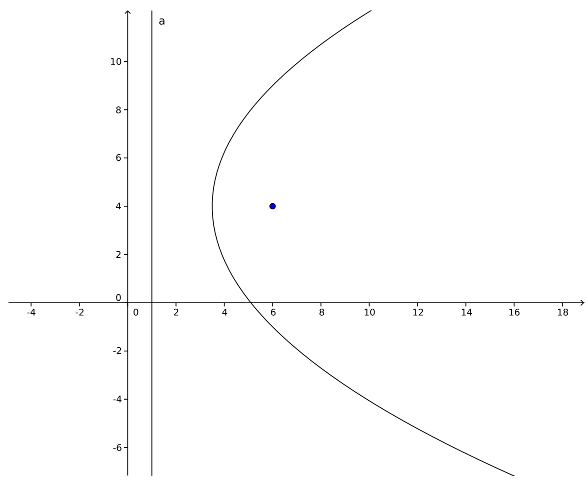
Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

ii) La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje horizontal es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

directriz, la recta de ecuación: $x = h - p$ y foco $(h+p,k)$.

Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha y si $p < o$, la parábola se abre hacia la izquierda.



Ejercicio 3.6. *Encuentre el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola de ecuación* $4x + 2y^2 + 8 = 0$. *Resp.* $F = (-\frac{5}{2}, 0)$ *Directriz* $x = -\frac{5}{2}$.

Ejemplo 3.4. *Encuentre el foco de la parábola de ecuación* $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Solución: Se tiene que $2y = -x^2 - 2x + 1$ o bien $x^2 + 2x = -2y + 1$. Luego, completando cuadrados se tiene

$(x+1)^2 - 1 = -2y + 1$, es decir $(x+1)^2 = -2(y-1)$. Por lo tanto se trata de una parábola de eje vertical con vértice $(h,k) = (-1,1)$, $p = -\frac{1}{2} < 0$ luego la parábola se abre hacia abajo. Foco $= (h, k+p) = (-1, \frac{1}{2})$.

Ejercicio 3.7. *Encuentre la ecuación de la parábola de eje vertical, que pasa por los puntos* $(0,3), (3,4)$ *y* $(3,-3)$. *Resp.* $5x^2 - 14x - 3y + 9 = 0$.

4. Primitivas e integración indefinida

Suponga que se pide encontrar una función f tal que $f'(x) = 5x^4$. Entonces $f(x) = x^5$, es una tal función, pero también lo son $f(x) = x^5 + k$, para cada $k \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1. *Se dice que una función F* **es una primitiva (o una antiderivada) de una función** f, *si para cada x en el dominio de f se tiene que $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 4.1. *Sea F una primitiva de f en un intervalo I, entonces G es una primitiva de f en I si y solo si $G(x) = F(x) + k \;\; \forall\; x \in I$, donde $k \in \mathbb{R}$, es una constante.*

Notación para primitivas: Si $y = F(x)$ es una primitiva de f entonces se dice que $F(x)$ es una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

La operación de encontrar todas las soluciones de esta ecuación se denomina integración y se denota por el símbolo $\int$

La notación $\int f(x)dx = F(x) + k$ donde k es una constante arbitraria, significa que F es una primitiva de f, esto es $F'(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f. Con esto tenemos

$$\int F'(x)dx = \{\; F(x) + k \;/\; k \in \mathbb{R} \;\}$$

Usaremos la notación

$$\int F'(x)dx = F(x) + k,\;\; k \in \mathbb{R}.$$

teniendo presente que se trata de un conjunto de soluciones. **No hay que olvidar la constante** k.

Con esto y el conocimiento de derivadas se tiene que

1. $\int cos(x)dx = sen(x) + k,\;\; k \in \mathbb{R}.$

2. $\int sen(x)dx = -cos(x) + k,\;\; k \in \mathbb{R}.$

3. $\int sec^2(x)dx = tan(x) + k,\;\; k \in \mathbb{R}.$

4. $\int 0dx = k,\;\; k \in \mathbb{R}.$

5. $\int \alpha dx = \alpha x + k,\ k \in \mathbb{R}.$

6. $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + k,\ k \in \mathbb{R},\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, t \neq -1.$

7. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

8. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Observación 4.1. *La expresión* $\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + k,\ k \in \mathbb{R},$ *es válida para todo* $t \in \mathbb{R}, t \neq -1$*. En el caso* $t = -1$ *se pone* $\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|)+k, k \in \mathbb{R} = ln|x|+k, k \in \mathbb{R}$ *y se lee logarimo natural de valor absoluto de x. Más adelante veremos la función logaritmo natural y sus propiedades.*

Ejercicio 4.1. *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int [\frac{2}{\sqrt{x}} + sen(x)]dx,$ *b)* $\int [x^{\frac{2}{5}} + sec^2(x)]dx,$ *c)* $\int sen^2(x)dx,$ *d)* $\int cos^2(x)dx.$

Sugerencia: $2sen^2(x) = 1 - cos(2x),\ \ 2cos^2(x) = 1 + cos(2x)$

4.1. Métodos básicos de integración.

1. **Por Partes** Se basa en la derivada de un producto de funciones.

   $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$

   Ejemplo 4.1. *Calcule* $\int xsen(x)dx$

   Solución: Sea $u = x, dv = sen(x)dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -cos(x)$. Luego $\int xsen(x)dx = -xcos(x) + \int cos(x)dx = -xcos(x) + sen(x) + k,\ k \in \mathbb{R}.$

   Ejercicio 4.2. *Calcule* $\int x^2 sen(x)dx$

   Ejercicio 4.3. *Calcule* $\int sen(x)sen(2x)dx$

2. **Sustituciones simples.** Se basa en la derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

   $\int F'(g(x))g'(x)dx = \int F'(u)du = F(u) + k, k \in \mathbb{R} = F(g(x)) + k, k \in \mathbb{R}.$

Ejemplo 4.2. *Calcule* $\int sen(3x)dx$.

Solución: Sea $u = 3x$, entonces $du = 3dx$, luego

$\int sen(3x)dx = \frac{1}{3}\int sen(u)du = -\frac{1}{3}cos(u) + k,\ k \in \mathbb{R} = -\frac{1}{3}cos(3x) + k,\ k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.3. *Calcule* $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx$.

Solución: Sea $u = x - 1$, entonces $du = dx$, luego $\int \frac{x}{(x-1)^4}dx = \int \frac{u+1}{u^4}du = \int(u^{-3} + u^{-4})du = \frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-3}}{-3} + k, k \in \mathbb{R} = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{(x-1)^{-3}}{-3} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.4. *Calcule* $\int \sqrt{3x+1}dx$.

Ejercicio 4.5. $\int tan(x)dx$

Ejercicio 4.6. *Pruebe la siguiente fórmula de reducción:*
$x^n sen(x)\ dx = -xcos(x) + n\int x^{n-1}cos(x)\ dx$

Ejercicio 4.7. *Pruebe la siguiente fórmula de reducción:*
$\int sen^n(x)\ dx = -\frac{1}{n}sen^{n-1}(x)cos(x) + \frac{n-1}{n}\ \int sen^{n-2}(x)\ dx$.
Sugerencia use integración por partes con $u = sen^{n-1}(x),\ dv = sen(x)dx$.

Ejemplo 4.4. *Si la aceleración de un cohete espacial que cae está dada por* $y''(t) = -32\ m/s^2$, *encuentre la posición* $y(t)$ *en un tiempo* t. *Suponga que la velocidad inicial del cohete es* $y'(0) = -100m/s$ *y su posición inicial es* $y(0) = 1000\ mts$.

Solución: Hay que calcular dos primitivas. $y'(t) = \int y''(t)\ dt$ y $y(t) = \int y'(t)\ dt$ donde $y'(t) = \int y''(t)\ dt = \int(-32)\ dt = -32t + k,\ k \in \mathbb{R}$ es la velocidad $v(t)$ del cohete. Luego $-100 = v(0) = -32\cdot 0 + k = k$, Por lo tanto, $v(t) = y'(t) = -32t - 100$. Necesitamos $y(t) = \int y'(t)\ dt = \int(-32t - 100)\ dt = -16t^2 - 100t + k, k \in \mathbb{R}$. Como la posición inicial es $y(0) = 1000$, se tiene que $1000 = -16\cdot 0 - 100\cdot 0 + k$, Luego $k = 1000$ y así se tiene que $y(t) = -16t^2 - 100t + 1000$.

5. Sumas de Riemann e integral definida.

5.1. Sumas de Riemann

Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ (no necesariamente continua ni positiva). Queremos saber que significa el término $\int_a^b f(x)dx$

Definición 5.1. *Una Partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$ es una colección de n subintervalos*

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots [x_{n-1}, x_n],$$

de $[a, b]$ tales que

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

La longitud del i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Si todos los intervalos de la partición tienen igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ se habla de **una partición regular.**

Para cada $i, 1 \leq i \leq n$, sea $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ un punto cualesquiera del intervalo entonces $S = \{x_1^*, x_2^* \cdots, x_n^*\}$ se llama una selección de la partición $\mathbb{P}$.

Definición 5.2. *Sea f función definida y acotada sobre el intervalo cerrado $[a, b], \mathbb{P}$ una partición de $[a, b]$ y S una selección de $\mathbb{P}$. Entonces* **una suma de Riemann** *para la función f determinada por $\mathbb{P}$ y S es*

$$R = \sum_{1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Observación 5.1. *El punto x_i^* es un punto arbitrario de subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se suele escoger de tres formas:*

1) $x_i^* = x_{i-1}$ el extremo izquierdo de $[x_{i-1}, x_i]$.

2) $x_i^* = x_i$ el extremo derecho o de $[x_{i-1}, x_i]$.

3) $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$.

Ejemplo 5.1. *Encuentre las sumas de Riemann asociadas a f donde $f(x) = 5 + x^2$, en $[1, 3]$ usando una partición regular y las tres formas anteriores.*

a) para $n = 6$.

b) para $n \in \mathbb{N}$

Solución: 1.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$, $x_i^* = x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{1}{3} = \frac{i+2}{3}$. Luego

$x_1^* = x_0 = 1$

$x_2^* = x_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$x_3^* = x_2 = 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$x_4^* = x_3 = 1 + 3\frac{1}{3} = 2$

$x_5^* = x_4 = 1 + 4\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x_6^* = x_5 = 1 + 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$$R_{izq} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i+2}{3}\right)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6}[5+(\frac{i+2}{3})^2]\frac{1}{3} = 5\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{3}+$$

$$\sum_{i=1}^{6}(\frac{i+2}{3})^2]\frac{1}{3} = 10 + \frac{1}{27}\sum_{i=1}^{6}(i+2)^2 = 10 + \frac{1}{27}[9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64].$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. y $x_i^* = x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{2}{n} = \frac{n+2i-2}{n}$

$$R_{izq} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i-2}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}[5+(\frac{n+2i-2}{n})^2]\frac{2}{n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}+\sum_{i=1}^{n}(\frac{n+2i-2}{n})^2\frac{2}{n} = n\frac{10}{n}+\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2+4i^2+4+4ni-4n-4i) = 10+\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n^2+$$

$$\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}ni - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}n - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i = 12 + \frac{2}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+\frac{8}{n^2} + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n} - \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)}{2} = 12 + \frac{4}{3n^2}(n+1)(2n+1) + \frac{8}{n^2} + \frac{4(n+1)}{n}$$

$$-\frac{8}{n} - \frac{4(n+1)}{n^2}.$$

2.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$, $x_i^* = x_i = 1 + i\frac{1}{3} = \frac{i+3}{3}$. Luego

$x_1^* = x_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$x_2^* = x_2 = 1 + 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$x_3^* = x_3 = 1 + 3\frac{1}{3} = 2$

$x_4^* = x_4 = 1 + 4\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x_5^* = x_5 = 1 + 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

$x_6^* = x_6 = 1 + 6\frac{1}{3} = 3.$

y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{der} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{i+3}{3}\right)\frac{1}{3}$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i^* = x_i = 1 + i\frac{2}{n} = \frac{n+2i}{n}$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{der} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i}{3}\right)\frac{2}{n}$$

3.- a) Tenemos $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$.

$x_i^* = m_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{1}{2}[\frac{i+2}{3}+\frac{i+3}{3}] = \frac{1}{6}[2i+5]$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{med} = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(m_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{1}{6}[2i+5]\right)\frac{1}{3}$$

b) Para el caso general $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ y $x_i^* = m_i = \frac{n+2i-2}{n} + \frac{n+2i}{n} = \frac{2n+4i-2}{n}$ y se procede al cálculo de la sumatoria:

$$R_{med} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2n+2i-2}{n}\right)\frac{2}{n}$$

Ejercicio 5.1. *Encuentre las sumas de Riemann* R_{izq}, R_{der} *de* $f(x) =$*sen*(x) *en* $[0,\pi]$ *en los subintervalos* $[0,\frac{\pi}{3}], [\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ *y* $[\frac{2\pi}{3},\pi]$

5.2. Integral definida

Definición 5.3. *Sea* $\mathbb{P}$ *una partición del intervalo* $[a,b]$*. Se llama* **norma de la partición** $\mathbb{P}$ *al máximo de las longitudes de los subintervalos* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *de* $\mathbb{P}$ *y se anota* $|\mathbb{P}|$.

Definición 5.4. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Se llama* **integral definida de la función f de a a b** *al número real*

$$I = \lim_{|\mathbb{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f({x_i}^*)\Delta x_i$$

siempre que este límite exista, en cuyo caso se dice que f es integrable en $[a, b]$.

Notación de Leibniz:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathbb{P}| \to 0} f({x_i}^*)\Delta x_i$$

a se llama límite inferior de la integral y

b se llama límite superior de la integral.

El siguiente Teorema lo usaremos pero no lo demostraremos aquí

Teorema 5.1. *f continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ f integrable en $[a, b]$.*

Observación 5.2. *En el caso de una función continua en $[a, b]$ y una colección de particiones regulares del intervalo en n subintervalos, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|\mathbb{P}| \to 0 \iff n \to \infty$$

En el caso de una función continua en $[a, b]$ y una partición regular se tiene que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f({x_i}^*)\Delta x$$

Observación 5.3. *Vimos que la definición de integral se aplica solamente si $a < b$, pero es conveniente incluir los casos $a = b$ y $a > b$. Se define la integral, para estos casos, como*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

De las propiedades de los límites se tienen las siguientes propiedades de las integrales: 1.- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$,

2.- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$

3.- Si $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4.- Si $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

5.- Sean $a < c < b$. Entonces $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

Según la observación 5.3, cualquiera sea el orden entre a, b y c se cumplirá $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

5.3. Evaluación de integrales

Teorema 5.2. Teorema Fundamental del Cálculo 1 parte (TFC 1 parte): *Si g es una primitiva de una función f, en $[a,b]$ es decir, si $g'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [a,b]$, y f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\ dx = g(b) - g(a)$.*

Idea intuitiva: (debida a Newton) Introduzcamos una función A como $A(x) = \int_a^x f(u)\ du$. Si el incremento de x es Δx entonces el de A es ΔA.

Se tiene que $\Delta A \approx f(x)\Delta x$, es decir, $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x)$, de donde $\frac{dA}{dx} = lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$. Es decir, $A'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ otra primitiva de $f(x)$, es decir $g'(x) = f(x)$ entonces

$$A(x) = g(x) + C.$$

Como $A(a) = \int_a^a f(u)\ du = 0,\ A(b) = \int_a^b f(u)\ du = \int_a^b f(x)\ dx$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)\ dx = A(b) = A(b) - A(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C] = g(b) - g(a).$$

La diferencia $g(b) - g(a)$ se abrevia por $[g(x)]_{x=a}^{x=b}$ o más simple por $[g(x)]_a^b$ y asi el Teorema queda

$$\int_a^b f(x)\ dx = [g(x)]_a^b, \quad g'(x) = f(x)\ \ \forall\ x \in [a,b]$$

Con esto tenemos por ejemplo que:

$$1. - \int_a^b x^n\ dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},\ \ n \neq -1$$

$$2.-\int_a^b cos(x)\ dx = [sen(x)]_a^b = sen(b) - sen(a)$$

$$3.-\int_a^b sen(x)\ dx = [-cos(x)]_a^b = cos(a) - cos(b)$$

$$4.-\int_a^b c\ dx = c(b-a)$$

$$5.-\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx$$

$$6.-\text{ Si } m \leq f(x) \leq M \text{ entonces } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

1. Método de integración por Partes para integrales definidas

$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$

Ejemplo 5.2. *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsen(x)dx$

Solución: Sea $u = x, dv = sen(x)dx$. Entonces $du = dx$ y $v = -cos(x)$. Luego $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsen(x)dx = [-xcos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx = [-xcos(x) + sen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0cos(0) + sen(0) - [\frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\frac{\pi}{2})] = -\frac{\pi}{2}\cdot 0 - 1 = -1$

2. Método de sustitución simple para integrales definidas.

Suponga que g es una función con derivada continua en $[a,b]$ y que f función continua en el conjunto $g([a,b])$. Sea $u = g(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du.$$

En efecto si F es una primitiva de f se tiene que
$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = [F(u)]_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$

Ejercicio 5.2. *Evalue las siguientes integrales* $\int_1^5 (x^3+7)\ dx$, $\int_1^4 \sqrt{3x+1}\ dx$, $\int_{-1}^3 2|x|\ dx$

Ejercicio 5.3. *Evalue las siguientes integrales* ; $\int_0^3 x^2\sqrt{x^3+9}\, dx$, $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\ dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen(2x)cos^3(2x)\ dx$,

Observación 5.4. *En el caso de una función continua y positiva se trata del área A bajo la curva $y = f(x)$. Notar que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores $\leq A \leq$ la suma de las áreas de los rectángulos superiores.*

Area bajo una curva: Sea f función continua y positiva en $[a, b]$. Entonces el área A debajo de la gráfica de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $y = b$ es $A = \int_a^b f(x)\, dx$.

Ejercicio 5.4. *Calcule el área bajo la curva $y = 1 + x$ en el intervalo* $[-2, 5]$.

Area entre curvas o regiones planas con respecto al eje X: Sean f y g funciones continuas tales $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y por las rectas verticales $x = a$ e $x = b$ es $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$.

Area entre curvas o regiones planas con respecto al eje Y: Sean f y g funciones continuas tales $f(y) \geq g(y)\ \forall\ y \in [c, d]$. Entonces el área A de la región acotada por las gráfica de $x = f(y)$ e $x = g(y)$ y por las rectas horizontales $y = a$ e $y = b$ es $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$.

Ejercicio 5.5. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$ y $y = 2x - 2$. Haga un esbozo de la región.*

Ejercicio 5.6. *Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = -x^2 + 4$. Haga un esbozo de la región.*

Trabajo

El concepto de trabajo se introduce para medir el efecto acumulado de una fuerza al mover un cuerpo de una posición a otra. En el caso más sencillo, una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza constante. Si la fuerza tiene magnitud F y la partícula se mueve a lo largo de una distancia d, entonces el trabajo realizado por la fuerza está dado por $W = F \cdot d$.

Usaremos la integral para generalizar la definición de trabajo al caso en que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza variable.

Se define el trabajo W realizado por la fuerza $F(x)$ al mover la partícula de $x = a$ a $x = b$ como

$$W = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Trabajo realizado contra la gravedad. De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza $F(r)$ que se debe ejercer sobre un cuerpo para mantenerlo a una distancia r, ($r \geq R$, el radio de la tierra) del centro de la tierra es

$$F(r) = \frac{k}{r^2}$$

donde k es una constante positiva.

Ejercicio 5.7. *¿Cuánto trabajo debe realizarse para levantar un satélite de* 1000 *libras de manera vertical con respecto de la superficie de la Tierra hasta una órbita* 1000 *millas sobre la superficie? Considere* $R = 4000$ *millas como el radio de la Tierra.*

Solución: Como $F(R) = 1000$ (libras) cuando $R = 4000$ millas, se tiene que $k = F(R)R^2 = 1000 \cdot (4000)^2 = 16 \cdot 10^9(\text{libras} \cdot \text{millas}^2)$. Por lo tanto, $W = \int_{4000}^{5000} F(r)\, dr = \int_{4000}^{5000} \frac{k}{r^2}\, dr = [-\frac{k}{r}]_{4000}^{5000} = 16 \cdot 10^9[\frac{1}{4000} - \frac{1}{5000}] = 8 \cdot 10^5$ (millas $\cdot$ libras).

5.4. Valor promedio de una función y Teorema Fundamental del Cálculo 2 parte

Valor promedio de una función: Sea f función integrable en $[a, b]$. Entonces el valor promedio $\overline{y}$ de $y = f(x)$ en $[a, b]$ es $\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$.

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}$

Teorema 5.3 (Teorema Fundamental del Cálculo 2 parte)**.** *Sea f función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Se define una función F en $[a, b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces $F'(x) = f(x), \ \forall\, x \in [a, b]$.*

Demostración: Tenemos que

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

Pero

$$\int_a^{x+h} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Así

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Usando el valor promedio de f en $[x, x+h]$ se tiene que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(\overline{t}), \text{ para algún } \overline{t} \in [x, x+h]$$

Notemos que $\overline{t} \to x$ cuando $h \to 0$ y como f es continua, se tiene que

$$F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \lim_{\overline{t}\to x} f(\overline{t}) = f(x).$$

Ejemplo 5.3. *Derive la función* $h(x) = \int_0^{x^2} t^3 sen(t)\, dt,$

Observamos que $h(x) = F(g(x))$, donde $F(x) = \int_0^x t^3 sen(t)\, dt, g(u) = u^2$. Luego $F'(a) = a^3 sen(a)$ y por lo tanto

$$h'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = (x^2)^3 sen(x^2)2x = 2x^6 x sen(x^2) = 2x^7 sen(x^2).$$

5.5. Función Logaritmo Natural

Sea $x > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Se define la función

$$ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ por } ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Propiedades:

1.- $ln(1) = 0$.

2.- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$, luego es una función creciente y como $(ln(x))'' = -\frac{1}{x^2}$, es cóncava hacia abajo. Hacer el gráfico.

3.- $ln(xy) = ln(x) + ln(y)\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \ y > 0.$

$ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$. Sea $u = \frac{t}{x}$, o bien $t = ux$, luego $dt = xdu$ y tenemos

$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^{y} \frac{1}{u}\, du = ln(y)$. Reemplazando queda $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

4.- $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ ln(x^k) = kln(x)$.

5.- $\forall\, x > 0\ \ ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)$ Note que $0 = ln(1) = ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = ln(x) + ln\left(\frac{1}{x}\right)$ Entonces $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$

6.- $\lim\limits_{x\to\infty} ln(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty.$

7.- $Rec(ln) = \mathbb{R}$

Nota. Sea $x < 0$. Luego $-x > 0$. Así, $ln(-x) = \int_1^{-x} \frac{1}{t}\, dt$

Con esto tenemos que si $x \neq 0,\ ln(|x|) = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt$ Se anota $ln|x| = \int_1^{x} \frac{1}{t}\, dt$

Con esto tenemos que $\int \frac{1}{u}\, du = ln|u| + c$. Sin embargo, las primitivas de una función están asociadas a intervalos de la función, así que la igualdad anterior es válida en los positivos, o en los negativos, pero no ambos a la vez.

Con esto $\int tan(x)\, dx = ln|cos(x)| + c$.

Ejercicio 5.8. *Pruebe que a)* $\forall\, x, y > 0\ \ ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$.

b) $\forall\, x > 0,\ q \in \mathbb{Q}\ \ ln(x^q) = q\, ln(x)$.

Ejercicio 5.9. *Pruebe que* $\int sec(x)\, dx = ln|sec(x) + tan(x)| + c$.

5.6. Funciones inversas, existencia, continuidad y derivada

Una función $f : A \to B$ es *invertible* ssi es *biyectiva*. En tal caso su *inversa* es la función denotada f^{-1} con $f^{-1} : B \to A$ que cumple

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y) \wedge x \in B \wedge y \in A$$

<u>Nota:</u> **no confunda** la función inversa f^{-1} con el recíproco de f, que cumple

$$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

Ejemplo 5.4. *Si* $f : (-\infty, 0] \to [2, \infty)$ *está dada por* $f(x) = 2 + x^2$*, entonces es biyectiva y por tanto invertible, y su inversa es*

$$f^{-1} : [2, \infty) \to (-\infty, 0] \text{ dada por } f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 2}$$

Se tiene:

1. Si f es invertible y continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio

2. Si f es invertible y derivable en un punto $x = c$, y $f'(c) \neq 0$, entonces su inversa f^{-1} es derivable en b, con $b = f(c)$, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}$$

Ejemplo 5.5. *Si* $f : (-\infty, 0] \to [2, \infty)$ *está dada por* $f(x) = 2+x^2$, *como* $f(-3) = 11$ *y* $f'(-3) = -6 \neq 0$, *entonces se cumple* $(f^{-1})'(11) = \dfrac{1}{f'(-3)} = \dfrac{1}{-6}$. *Más aún, si* $a < 0$, *como* $f'(a) = 2a \neq 0$, *entonces* $(f^{-1})'(2 + a^2) = \dfrac{1}{2a}$, *porque* $2 + a^2 = f(a)$

5.7. Función Exponencial

La función logaritmo natural $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es biyectiva luego tiene inversa la función exponencial $= exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que

1) $\forall\ x\ >\ 0\ \ exp(ln(x)) = x$.

2) $\forall\ y\ \in \mathbb{R}\ \ ln(exp(y)) = y$.

O sea $y = exp(x)$ si y solo si $x = ln(y)$

Observación: Otra notación para $exp(x)$ es e^x

Propiedades:

1.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ \ e^0 = 1,\ \ (e^x)' = e^x$

Se tiene que $ln(e^x) = x$, luego $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$. De donde, $(e^x)' = e^x$.

2.- e^x, es creciente en $\mathbb{R}$

3.- $\forall\ x, y\ \ \in \mathbb{R}\ \ \ e^{x+y} = e^x e^y$. En efecto se tiene $ln(e^x e^y) = ln(e^x) + ln(e^y) = x + y = ln\left(e^{x+y}\right)$, pero ln es inyectiva luego $e^x e^y = e^{x+y}$, $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}$.

4.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}$, $\forall\ q \in \mathbb{Q}\ \ (e^x)^q = e^{xq}$.

Ejercicio 5.10. *Determine* $\frac{dy}{dx}$ *para* $y = ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}\right)$

Ejercicio 5.11. *Evalue o calcule según corresponda:*

a) $\int_2^4 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$ *b)* $\int \frac{1}{x(ln(x))^2}\,dx$ *c)* $\int \frac{cos(x)}{1+sen(x)}\,dx$ *d)* $\int xe^{-3x^2}\,dx$

e) $\int xe^x\,dx$ *f)* $\int cos(x)e^{sen(x)}\,dx$ *g)* $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x^3}}\,dx$

Ejercicio 5.12. *Derive las funciones: b)* $f(x) = e^{4-x^2}$ *c)* $g(x) = ln(x + e^{-x})$

d) $k(x) = e^{-2x}sen(3x)$ *e)* $r(t) = (e^{2t} + e^{3t})^7$

Ejemplo 5.6. *Use la propiedades de la función logaritmo para probar que* $\forall\ x \in \mathbb{R}\ e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Se tiene que si $t > 0$, $\frac{1}{t} = (ln(t))' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{ln(t+h)-ln(t)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(\frac{t+h}{t}\right) = \lim\limits_{h\to 0} ln\left(\frac{t+h}{t}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim\limits_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{t}\right)^{\frac{1}{h}}$. Sea $n = \frac{1}{h}$ Luego $\frac{1}{t} = \lim\limits_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n$. Si ponemos $x = \frac{1}{t}$, queda $x = \lim\limits_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n$. Pero ln es continua, luego $x = ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nt}\right)^n\right)$ Así se tiene que si $x > 0, e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Veamos que si $x < 0$, entonces $x = -k, k > 0$ luego $e^x = e^{-k} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-t}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Y también vale para $x = 0$.

Función Exponencial en base $a,\ a > 0$.

Definición 5.5. *Se define la función exponencial en base a como la función*

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ \textit{definida por}\ exp_a(x) = a^x = e^{xln(a)}.$$

Propiedades: Sea $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Entonces:

1.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ \ a^0 = 1,\ \ (a^x)' = ln(a)a^x$

2.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}\ \ a^{x+y} = a^x a^y$.

3.- $\forall\ x\ \in \mathbb{R}\ \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

4.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}\ \ (a^x)^y = a^{xy}$.

Ejemplo 5.7. *Calcule la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2^{ln(x)}$.

b) $g(x) = 2^x 3^{x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = (e^{ln(x)ln(2)})' = e^{ln(x)ln(2)}\frac{(ln(x))'}{ln(2)} = 2^{ln(x)}\frac{1}{xln(2)}$.

b) $g'(x) = (e^{xln(2)}e^{x^2ln(3)})' = (e^{xln(2)+x^2ln(3)})' = e^{xln(2)+x^2ln(3)}[xln(2) + x^2ln(3)]' = e^{xln(2)}e^{x^2ln(3)}[ln(2) + 2xln(3)] = 2^x3^{x^2}[ln(2) + 2xln(3)]$.

Ejemplo 5.8. *Calcule la siguiente integral indefinida* $\int 6x^3 5^{x^4+7}\ dx$

Solución: Sea $u = x^4 + 7$, luego $du = 4x^3dx$. Por lo tanto

$\int 6x^3 5^{x^4+7}\ dx = 6\int x^3 5^{x^4+7}\ dx = \frac{6}{4}\int 5^u\ du = \frac{3}{2}\int e^{uln(5)}\ du = \frac{3}{2}\frac{e^{uln(5)}}{ln(5)} + k = \frac{3}{2}\frac{e^{(x^4+7)ln(5)}}{ln(5)} + k = \frac{3}{2}\frac{5^{(x^4+7)}}{ln(5)} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Función logaritmo en base $a,\ a > 0$.

Sean $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Se define la función

$$log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ \text{ por } log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

Proposición 5.1. *La función* log_a *satisface las propiedades*

a) $\forall\ x\ \in \mathbb{R}^+\ exp_a(log_a(x)) = x$.

b) $\forall\ y\ \in \mathbb{R}\ log_a(exp_a(y)) = y$.

Luego log_a *es la función inversa de* exp_a *y satisface*

$$y = log_a(x) \text{ si y solo si } x = a^y$$

Demostración: a) Sea $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $exp_a(log_a(x)) = exp_a(\frac{ln(x)}{ln(a)}) = a^{\frac{ln(x)}{ln(a)}} = e^{\frac{ln(x)}{ln(a)}ln(a)} = e^{ln(x)} = x$.

b) En forma similar.

La función log_a satisface también las siguientes propiedades:

1.- $log_a(1) = 0$.

2.- $\forall\ x \in \mathbb{R}^+\ \ (log_a(x))' = \frac{1}{xln(a)}$.

3.- $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$.

4.- $\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}\ \ log_a(x^y) = ylog_a(x)$.

5.- $\forall\ y \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(\frac{1}{y}) = -log_a(y)$.

6.- $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}^+\ \ log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$.

Nota: Si $a = e$ se tiene el logaritmo natural ln y si $a = 10$, se tiene log_{10}, llamado logaritmo común.

Ejemplo 5.9. *Calcule la derivada de las siguientes funciones:*
a) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;\; f(x) = 2^{\sqrt{x}}$, *b)* $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; g(x) = log_3(4^{x^2})$, *c)*$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;\; h(x) = x^{cos(x)}$.

Solución: a) $f'(x) = (e^{\sqrt{x}ln(2)})' = e^{\sqrt{x}ln(2)}(\sqrt{x}ln(2))' = 2^{\sqrt{x}}[ln(2)\frac{1}{2\sqrt{x}}]$.

b) $g'(x) = (log_3(4^{x^2}))' = (\frac{ln(4^{x^2})}{ln(3)})' = (x^2\frac{ln(4}{ln(3)})' = 2x\frac{ln(4}{ln(3)}$.

c) $ln(h(x)) = ln(x^{cos(x)}) = cos(x)ln(x)$, luego $h(x) = e^{cos(x)ln(x)}$, por lo tanto, $h'(x) = (e^{cos(x)ln(x)})' = e^{cos(x)ln(x)}[cos(x)ln(x)]' = h(x)[-sen(x)ln(x) + cos(x)\frac{1}{x}] = x^{cos(x)}[-sen(x)ln(x) + cos(x)\frac{1}{x}]$.

Aplicaciones de la función Exponencial.

1.- Crecimiento poblacional. *Sea $P(t)$ una población con tasas de natalidad β y de mortandad δ. (β, δ constantes), t se mide en años. Se tiene que la razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional al tamaño de la población, es decir,*

$$\frac{dP}{dt} = kP, \text{ o bien } P'(t) = kP(t)$$

donde $k = \beta - \delta$ es la tasa de crecimiento anual. ¿Cuánto vale $P(t)$?

2.- Desintegración radiactiva. *Se considera una muestra que tiene $N(t)$ átomos de isótopo radiactivo en el momento t. Se ha observado que una fracción constante de estos átomos radioactivos decae expontáneamente durante cada unidad de tiempo. Para conseguir un modelo para $N(t)$ se usa la ecuación diferencial*

$$\frac{dN}{dt} = -kN, \text{ o bien } N'(t) = -kN(t)$$

con $k > 0$. Su solución es $N(t) = N(0)e^{-kt}$ donde $N(0)$ es el número de átomos radioactivos presentes en la muestra en el tiempo $t = 0$. Se llama **vida media τ de un isótopo** *al tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad inicial se desintegre en otros elementos, es decir $\tau = t$ cuando $N(t) = \frac{1}{2}N(0)$. Pruebe que $\tau = \frac{ln(2)}{k}$.*

3.- Ley de enfriamiento de Newton. *La razón de cambio con respecto al tiempo t de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura T_a del medio, es decir*

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \ \textit{o bien}\ T'(t) = k(T(t) - T_a)$$

donde $k < 0$. Su solución es $T(t) = [T(0) - T_a]e^{kt} + T_a$.

Ejemplo 5.10. *Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa inflamación séptica en la garganta) contiene 100 células. Al revisar el cultivo 60 minutos después, se determina que hay 450 células.*

a) Determine el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos), suponiendo que el crecimiento es exponencial.

b) ¿Cúal es el tiempo de duplicación de esta bacteria? (el tiempo de duplicación es el tiempo que se requiere para que el número de células se duplique).

Solución: Crecimiento exponencial significa que $P'(t) = kP(t)$, donde $P(t)$ es el número de células en el tiempo t. Luego $\frac{P'(t)}{P(t)} = k$.

Integrando se tiene que $ln(|P(t)|) = kt + C$, como $P(t) > 0$, $|P(t)| = P(t)$, luego $ln(P(t)) = kt + C$.

Por lo tanto, $P(t) = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C}$. Para $t = 0$, se tiene el número inicial de células, se tiene que $P(0) = e^{C}$, de donde finalmente

$$P(t) = P(0)e^{kt}$$

donde $P(0)$ es el número inicial de células (la población inicial).

En nuestro problema $P(0) = 110$. Luego $P(t) = P(0)e^{kt} = 100e^{kt}$. Sabemos además que $P(60) = 450$, luego $450 = 100e^{k60}$, es decir, $4,5 = e^{60k}$. Usando logaritmos se tiene que $ln(4,5) = 60k$, de donde $k = \frac{ln(4,5)}{60}$.

a) Por lo tanto $P(t) = 100e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$.

b) Queremos calcular t tal que $200 = 100e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$. Se tiene que $2 = e^{\frac{ln(4,5)}{60}t}$, luego, $ln(2) = \frac{ln(4,5)}{60}t$ y así $t = \frac{60ln(2)}{ln(4,5)} \sim 27,65$.

Luego el tiempo de duplicación para este cultivo de Streptococcus A es cerca de 28 minutos.

Ejemplo 5.11. *Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de* 180^oF*. Después de dos minutos de permanecer en una sala a* 70^oF*, el café se enfría hasta* 165^oF*. a) Calcule la temperatura en cualquier tiempo* t*.*

b) ¿ En qué tiempo t *el café llega a una temperatura tolerable de* 120^oF*.?*

Solución: Es un problema de la ley de enfriamiento de Newton. Su modelo es $T'(t) = k(T(t) - T_a)$ y su solución es $T(t) = [T(0) - T_a]e^{kt} + T_a$, donde $T(0) = 180$ es la temperatura inicial y $T_a = 70$ la temperatura ambiente. Por lo tanto, se tiene que $T(t) = 110e^{kt} + 70$,

Pero $T(2) = 165$, de donde $165 = 110e^{2k} + 70$, de donde $e^{2k} = \frac{95}{110}$ y $2k = ln(\frac{95}{110})$ y asi $k = \frac{1}{2}ln(\frac{95}{110}) \sim -0,0733017$ y

$$T(t) = 110e^{-0,0733017t} + 70$$

b) ¿Para que t se tiene que $T(t) = 120$?

$120 = 110e^{-0,0733017t} + 70$, usando logaritmo natural se llega a $t \sim 10,76$ minutos.

Ejercicio 5.13. *La vida media de la morfina en el torrente sanguíneo humano es de tres horas. Si inicialmente hay 0,4 mg de morfina en el torrente sanguíneo, halle la ecuación para la cantidad de morfina presente en el torrente sanguíneo después de t horas.*

Resp. $y(t) = 0{,}4\left(\frac{3}{2}\right)^t$.

¿Cuándo llegará la cantidad por debajo de 0.01 mg?

Ejercicio 5.14. *Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el* 63 % *de carbono 14 con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra ? Resp: Aproximadamente 3800 años.*

Ejercicio 5.15. *Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el* 63 % *de carbono 14 con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra ? Resp: Aproximadamente 3800 años.*

5.8. Integrales Impropias

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\int_a^b f(x)\, dx$ existe si f es continua en $[a, b]$.

Las Integrales Impropias son de dos tipos:

a) El intervalo de integración de la forma $[a, +\infty]$, $[-\infty, a]$, $(-\infty, +\infty]$

b) El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto c, es decir, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, o bien hay una asíntota vertical en ese punto.

Caso a) 1. f continua en $[a, +\infty)$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_a^t f(x)\, dx$, si este límite existe.

Caso a) 2. f continua en $(-\infty, b]$ entonces $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \displaystyle\int_t^b f(x)\, dx$, si este límite existe.

Caso a) 3. f continua en $(-\infty, +\infty)$ entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ donde c es cualquier número real.

Si el límite existe, se dice que la integral impropia converge. En caso contrario se dice que la integral impropia diverge.

Ejemplo 5.12. *Investigue las integrales impropias. a)* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$, *b)* $\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}\, dx$,

c) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$, *d)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Sol. a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\, dx = lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-3} = lim_{t \to +\infty} (-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ Luego la integral converge.

c)) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = lim_{t \to -\infty} (-2\sqrt{1-x}) =$
$lim_{t \to -\infty} (-2\sqrt{1-t} - 2) = +\infty$. Luego la integral diverge.

Caso b) 1. f continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{t \to b^-} \displaystyle\int_a^t f(x)\, dx$ si este límite existe.

Caso b) 2. f continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{t \to a^+} \displaystyle\int_t^b f(x)\, dx$ si este límite existe.

Caso b) 3. f continua en $[a, b]$ salvo en un punto $c \in (a, b)$ donde f tiene una discontinuidad infinita, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Ejemplo 5.13. *Investigue las integrales impropias. a)* $\int_{-1}^{h} 3\frac{1}{x^4}\,dx$, *b)* $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$,

Sol. b) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \cdots = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}3^{\frac{1}{3}}$

6. Sucesiones y Series infinitas de números reales

6.1. Sucesiones

Definición 6.1. *Una sucesión infinita de números reales, en adelante una sucesión, es una función* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to S(n)$. *Denotaremos* $S(n) = S_n$ *y* S *por* $(S_n)_{n\in N}$ *o por* $\{S_n\}_{n\in N}$

$(S_n)_{n\in N} = S_1, S_2, \cdots, S_n \cdots$

S_1 se llama el primer término de la sucesión, S_2 el segundo término, y así sucesivamente S_n el $n-$ésimo término de la sucesión $(S_n)_{n\in N}$.

Ejemplo 6.1. $(\frac{1}{n})_{n\in N} = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

Ejemplo 6.2. $(\frac{1}{n!})_{n\in N} = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n!}, \cdots$

Ejemplo 6.3. $(1 + (-1)^n)_{n\in N} = 0, 1, 0, 1, \cdots, 1 + (-1)^n, \cdots$

Ejemplo 6.4. *Sucesión de Fibonacci* $(F_n)_{n\in N}$ *dada por recurrencia:*

$$F_1 = F_2 = 1,$$

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n,\ \ \forall\ \ n \geq 2$$

Luego $F_3 = 2, F_4 = 3,$ *etc.*

Definición 6.2. *Límite de una sucesión* $(S_n)_{n\in N} : \lim\limits_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$ *si y solo si para todo* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|S_n - L| < \epsilon,\ \ \forall\ \ n \geq N$.

Definición 6.3. *Diremos que una sucesión* $(S_n)_{n\in N}$ *es convergente si y solo si* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *existe. En caso contrario diremos que* $(S_n)_{n\in N}$ *es divergente.*

Ejercicio 6.1. *Probar que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Como las sucesiones son funciones entonces se definen en forma natural nuevas sucesiones: Sean $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ dos sucesiones entonces son también sucesiones

i) $(S_n)_{n\in N} + (T_n)_{n\in N} = (S_n + T_n)_{n\in N}$

ii) $\lambda(S_n)_{n\in N} = (\lambda S_n)_{n\in N}, \ \ \forall \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$

iii) $(S_n)_{n\in N}(T_n)_{n\in N} = (S_nT_n)_{n\in N}$

iv) $\frac{(S_n)_{n\in N}}{(T_n)_{n\in N}} = (\frac{S_n}{T_n})_{n\in N}, T_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Usando propiedades de los límites de funciones se tienen los siguientes resultados:

Teorema 6.1. *Sean* $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ *dos sucesiones convergentes y sea* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n\to\infty} T_n = M \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n + T_n) = L + M.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda S_n) = \lambda L, \ \ \forall \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (S_nT_n) = LM.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{L}{M}$, *si* $T_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $M \neq 0.$

Teorema 6.2. *(Ley se sustitución) Sea* $(S_n)_{n\in N}$ *sucesión convergente y sea* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$. *Si* f *es una función continua en* L *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} f(S_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} (S_n)) = f(L).$

Ejemplo 6.5. *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n-1}{n+7}}.$

$(S_n)_{n\in N} = \frac{3n-1}{n+7}{}_{n\in N}$ es convergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{7}{n}} = 3.$
Como $\frac{3n-1}{n+7} > 0$ la raíz cuadrada de $\frac{3n-1}{n+7}$ es continua, luego
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n-1}{n+7}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+7}} = \sqrt{3}.$

Teorema 6.3. *(Teorema del sandwich para sucesiones) Sean* $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}, (U_n)_{n\in N}$ *sucesiones tales que* $S_n \leq T_n \leq U_n$ *y sea* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = L \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = L$.

Nota 1. $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Es decir si la sucesión de los valores absolutos converge a cero, entonces la sucesión también converge a cero. En efecto, se tiene que $-|S_n| \leq S_n \leq |S_n|$ y sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = 0$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} -|S_n| = 0$ luego por Teorema del sandwich $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

El Recíproco no es cierto. Por ejemplo sea $(S_n)_{n\in N} = ((-1)^n)_{n\in N}$ es una sucesión que diverge pues tiene dos límites 1 y -1. Sin embargo la sucesión de sus valores absolutos converge a 1.

Ejemplo 6.6. *Pruebe que la sucesión* $(\frac{(-1)^n sen(n)}{n^2})_{n\in N}$ *converge a* 0.

Solución: Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{(-1)^n sen(n)}{n^2}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n^2} = 0.$

Sabemos que $-1 \leq sen(n) \leq 1$, luego

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{sen(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$. Luego por Teorema del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n^2} = 0.$

Nota 2. Sea f función definida para todo real $x \geq 1$ y sea $(S_n)_{n\in N}$ sucesión tal que $f(n) = S_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = L$$

Debido a la nota anterior puede usarse la regla de L'Hôpital para sucesiones. Sean f, g funciones definidas para todo real $x \geq 1$ y sean $(S_n)_{n\in N}, (T_n)_{n\in N}$ sucesiones tales que $f(n) = S_n, \ \ g(n) = T_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si los dos últimos límites existen

Sucesiones crecientes, decrecientes y acotadas

Definición 6.4. *Se dice que una sucesión* $(S_n)_{n \in N}$ *es*

i) **creciente** *si* $S_n < S_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

ii) **decreciente** *si* $S_n > S_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

iii) **monótona** *si es creciente o decreciente.*

iV) **acotada** *si existe* $M \in \mathbb{R}, M > 0$ *tal que* $|S_n| \leq M, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$

Teorema 6.4. *Toda sucesión convergente es acotada*

El recíproco no es cierto, pero tenemos el resultado

Teorema 6.5. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*