

Séptima Guía de Ejercicios
Matemáticas II. Semestre Primavera 2010

1. Considere la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, con $p \in \mathbb{R}$. Pruebe que:
 - i) Si $p \leq 1$ entonces la integral diverge.
 - ii) Si $p > 1$ entonces la integral converge.
2. Para $t > 0$ se define la función Gamma de Euler: $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$.
 Demuestre: i) $\Gamma(1) = 1$. ii) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo real $t > 0$.
 Calcule: iii) $\Gamma(7)$. iv) $\Gamma(n)$ para n cualquier entero positivo.
3. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. Evalúelas si es posible.

(a) $\int_0^{\infty} \sin^2(x) dx$	(d) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$	(g) $\int_0^{\infty} \cos(x) e^{-\sin(x)} dx$
(b) $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$	(e) $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$	(h) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$
(c) $\int_0^9 \frac{1}{(9-x)^{\frac{3}{2}}} dx$	(f) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	(i) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$
4. i) ¿Es correcto escribir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$?
 ii) Pruebe que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx$ diverge pero $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x^3 dx = 0$.
5. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

a) $\int_0^1 x \ln(4x) dx$	b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	c) $\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}} dx$
d) $\int_0^{\infty} \tan(x) dx$	e) $\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$	

6. Averigüe si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

$$a) \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \quad b) \int_0^{\infty} \frac{3}{e^x} dx \quad c) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$$

7. Considere la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en forma recursiva por:

$S_1 = \sqrt{2}$, $S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n}$ $\forall n \geq 1$ Demostrar que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 2, es creciente y calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

8. Se unen los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 10cm, obteniendo otro cuadrado. Se repite indefinidamente el proceso. Determinar la sucesión formada por los perímetros y áreas. Hallar la suma de todas las áreas.

9. Averigüe si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes:

$$a) \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad b) \left(\frac{3n^3}{e^{2n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad c) \left(\frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad d) \left(\frac{6n^3 + n - 1}{n^2 + 3} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

10. Averigüe si las siguientes sucesiones son crecientes o decrecientes. ¿Son acotadas? Si tienen límites, cálculelo.

$$a) \left(\frac{n+8}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad b) \left(\frac{3-4n^2}{n^2+1} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad c) \left(\frac{n+3}{n+2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad d) \left(\frac{6n-1}{n+3} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

11. Decida si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. En cada caso justifique su respuesta.

α .— Toda sucesión convergente es acotada.

β .— Si $(S_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

γ .— Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(S_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

δ .— Toda sucesión acotada es convergente.

ϵ .— Una sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.