Quinta Guía de Ejercicios

Matemáticas II. Semestre Primavera 2010

1. El teorema fundamental del cálculo parece implicar que $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = [-\frac{1}{x}]_{-1}^{+1} = -2$, en aparente contradicción con el hecho que $\frac{1}{x^2}$ es positivo para cada $x \neq 0$. ¿ Qué está mal en este razonamiento ?

2. Derive las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \int_0^x \text{sen}(t)\sqrt{1+t^3}dt$ $\quad$ $b)$ $f(x) = \int_0^{sen(x)} \sqrt{1-t^2}dt$

   $c)$ $f(x) = \int_{x+1}^{x^2} \text{sen}(t)dt$ $\quad$ $d)$ $f(x) = \int_{2x}^{x^2}(1+t^3)dt$

3. Use propiedades de logaritmos para calcular la derivada de:

   a) $f(x) = ln\frac{\sqrt{x^2+x}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$ $\quad$ $b)$ $f(x) = ln(sen^2(x))$ $\quad$ $c)$ $f(t) = \sqrt{t}\,[\cos(\ln t)]^2$

4. Pruebe las siguientes fórmulas de reducción:

   a) $\int (lnx)^n dx = x(lnx)^n - n \int (lnx)^{n-1}dx.$

   $b)$ $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1}e^x dx.$

5. Pruebe que $\int sec(x)\, dx = ln|sec(x) + tan(x)| + c.$

6. Calcule las integrales indefinidas:

   $a)$ $\int \frac{ln(x^5)}{x}\, dx$, $\quad$ $b)$ $\int \frac{1}{x}(1+ln(x))^5\, dx$, $\quad$ $c)$ $\int \frac{cos(\theta)}{1+sen(\theta)}\, d\theta$

   $d)$ $\int ln(x)\, dx$, $\quad$ $e)$ $\int xe^{-x}\, dx$, $\quad$ $f)$ $\int e^{2x} sen(3x)\, dx$

7. Calcule los siguientes límites

   $a)$ $\lim_{y\to 0^+} yln(y)$ $\quad$ $b)$ $\lim_{y\to 0^+} y^2 ln(y)$ $\quad$ $c)$ $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}ln(y)$

   $d)$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ $\quad$ $e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x}{x^2}$ $\quad$ $f)$ $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{e^x - 1}$

8. Calcule o evalue las siguientes integrales:

   $a)$ $\int_1^4 xe^{5x^2}\, dx$, $\quad$ $b)$ $\int_2^6 t(ln(t))^2\, dt$, $\quad$ $c)$ $\int \frac{ln(x)}{x}\, dx$

   $d)$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\, dx$, $\quad$ $e)$ $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\, dx$, $\quad$ $f)$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

9. Calcule o evalue las siguientes integrales:

   $a) \int 7^x \, dx, \;\; b) \int_1^4 \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

10. Haga un estudio completo de las funciones

    $a) \; f(x) = 2^x, \;\; b) \; g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \;\; c) \; h(x) = 1 + 2^{x-3},$

    $d) \; u(x) = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}.$

11. Derive las siguientes funciones:

    $a) f(x) = 5^{x^2}, \;\; b) \; g(x) = \frac{2}{ln(10)} 10^{\sqrt{x}}, \;\; c) \; h(x) = \frac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}{(x^4+3)^{\frac{4}{3}}}$

12. Derive las siguientes funciones:

    $a) f(x) = 3^{\sqrt{x^2+1}}, \;\; b) \; g(x) = log_3(\sqrt{x^2+4}), \;\; c) \; h(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}},$

    $d) \; u(x) = log_2(log_3(x)) \;\; e) \; l(x) = x^{sen(x)}, \;\; f) \; m(x) = x^{e^x},$

    $g) \; k(x) = (3 + 2^x)^x, \;\; h) \; j(x) = log_3(2^x)$

13. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right]$$

14. Sea $y = x^{x+1}$. Use logaritmo y sus propiedades para probar que

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x} + ln(x) \right) x^{x+1}.$$

15. Sea $y = (x+1)^{2/x}$. Use logaritmo y sus propiedades para calcular

$$\lim_{x \to \infty} (x+1)^{2/x}$$