Cuarta Guía de Ejercicios
Matemáticas II. Semestre Primavera 2010

1. Calcular la suma de Riemann con partición regular del intervalo dado en n subintervalos iguales. Use i) $c_i = x_i$, el punto frontera derecho del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. ii) $c_i = x_{i-1}$, el punto frontera izquierdo del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

   a) $f(x) = 3x - 4$ en el intervalo $[2, 5]$ *b)* $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

   c) $f(x) = x^2 - x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$ *d)* $f(x) = x^2 - x^3$ en el intervalo $[-1, 0]$.

2. Evalúe las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_1^4 (x^3 + 2)\, dx$ *b)* $\int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$ *c)* $\int_1^5 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$ *d)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 - \sin t) dt$

   e) $\int_1^2 (\frac{x^3+3}{x^2} - \frac{1}{2x^3})\, dx$ *f)* $\int_0^9 \sqrt{x}(x-4)\, dx$ *f)* $\int_{-1}^2 |x^3 - x|\, dx$ *g)* $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)\, dx$

   i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}(3x)\, dx$ *j)* $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, dx$ *k)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + \operatorname{sen}(t)\big)^{\frac{3}{2}} \cos(t) dt$

   e) $\int_0^8 t(t+1)^{\frac{1}{2}} dt$.

3. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1|\, dx$ *b)* $\int (x^{\frac{5}{2}} + \frac{23x}{\sqrt{9-x^2}})\, dx$ *c)* $\int \big(4x^{-3} + 27\operatorname{sen}(6x)\big)\, dx$

   d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$ *e)* $\int \left(\frac{2\pi y}{\sqrt{2+3y}} + y\sqrt{y-1}\right) dy$

   f) $\int \left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + 33\operatorname{sen}(11x)\right) dx$

   g) $\int (\frac{\cos}{\operatorname{sen}^3(x)} - \frac{x}{\sqrt{6-x^2}})\, dx$ *f)* $\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^2\, dx$

   h) $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\, dx$ ¿Depende el resultado de la paridad de n?

4. Evalúe las siguientes integrales definidas:

   a) $\int_0^1 \pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\ dx$ *b)* $\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi y \sqrt{1 + 4y^2}\ dy$

   c) $\int_{-1}^1 \pi(1 - 2y^2 + y^4)\, dy$ *d)* $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\pi y}{\sqrt{1+y^2}}\ dy$

   e) $\int_0^{\pi} 5x \operatorname{sen}(2x)\ dx$

5. ¿ Verdadero o falso ? Decidir si la afirmación es correcta. Si lo es probarlo y si no explicar la razón o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

   a) El intervalo [1,5] se parte en n subintervalos de igual longitud Δx y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo entonces $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int_1^5 f(x)dx$.

b) El intervalo [1,5] se parte en n subintervalos de igual longitud Δx y x_i es el punto terminal derecho del i-ésimo subintervalo entonces $\sum_{j=1}^{n} f(x_i)\Delta x < \int_1^5 f(x)dx$.

c) Si f(x) es creciente y continua en [a,b], el valor mínimo de f(x) en el i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_i)$.

6. Use una integral para demostrar que el área de un cuarto de circunferencia de radio r es $\frac{\pi}{4}r^2$.

7. Calcule el área entre la curva y el eje horizontal para las siguiente funciones. Esboce la región del plano.

   a) $g(x) = \tan(x)$, $\frac{-\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. *b)* $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $\frac{-\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.

   c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $0 \leq x \leq 3$. *d)* $g(x) = 2 - x^2$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

   e) $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 2$. *f)* $f(x) = 2\operatorname{sen}(x)$, $\frac{-\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

8. Calcule el área entre la curva y el eje horizontal para las siguiente funciones. Esboce la región del plano.

   a) $f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$, en el intervalo [0,3].

   c) $g(x) =$ $\tan(x)$, $\frac{-\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, *d)* $f(x) =$ 2 $\operatorname{sen}(2x)$, $\frac{-\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.

   e) $f(x) = x^3 - 9x$, $-4 \leq x \leq 4$.

9. Calcule el área entre las curvas para las siguiente funciones. Esboce la región del plano.

   a) $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$. *b)* $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

   c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. *d)* $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$.

   e) $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = x - 1$. *f)* $f(x) = x^4 - 2x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

10. Las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 10$ y $g(x) = \frac{9}{x^2}$, se cortan cuatro veces, limitando dos regiones de la misma área. Calcular el área de una de ellas.

11. Calcular el área A de la región R limitada por la recta de ecuación $y = x$ y la parábola $y^2 = 6 - x$. Use integración con respecto a a) x. b) y.

12. Suponga que un resorte tiene una longitud natural de 1 metro y que necesita una fuerza de 10 kilogramos para mantenerlo comprimido con un largo de 80 centímetros. Según la ley de Hooke para resortes elásticos (con un extremo fijo y el otro libre de moverse a lo largo del eje X y suponiendo que el extremo libre está en el origen cuando el resorte tiene su longitud natural), la fuerza $F(x)$ que se debe ejercer para mantener su extremo libre en el punto x es proporcional al desplazamiento x del extremo libre con respecto a su posición de reposo, es decir $F(x) = kx$ donde k es una constante de elasticidad del resorte. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 15 cm? Dé el resultado con sus unidades.