2.4. Guía de ejercicios de rotaciones, proyecciones y reflexiones, y la notación matricial.

1. Determine la matriz de las siguientes transformaciones:

   a) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{\pi}{2}$
   b) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{3\pi}{2}$
   c) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{\pi}{3}$
   d) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{5\pi}{3}$
   e) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $-\frac{4\pi}{3}$
   f) Proyección en el vector $\vec{w} = 2 + 3i$.
   g) Proyección en el vector $\vec{w} = (-1, 8)$
   h) Proyección en un vector de longitud 1 y ortogonal a $(2, 5)$.
   i) Proyección en la recta de ecuación $2x + 3y = 0$
   j) Proyección en la recta generada por el vector $(4, -3)$
   k) Reflexión en la recta $y = x$
   l) Reflexión en el eje Y
   m) Reflexión en la recta $L = \{\lambda(2, -3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
   n) Reflexión en la recta de ecuación $5x - 3y = 0$

2. Describa el efecto geométrico de las siguientes matrices, e identifique, si es el caso, si se trata de una Rotación centrada en el origen, una Proyección en una recta por el origen, una Reflexión en una recta por el origen, o ninguna de ellas:

   a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   e) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   j) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   k) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Demuestre que toda recta del plano por el origen se puede escribir de la forma $\{(\lambda\cos(\alpha), \lambda\operatorname{sen}(\alpha)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ donde $\alpha \in [0, \pi[$ es el ángulo que forma la recta con el eje X

4. Usando la afirmación anterior, demuestre que:

   a) toda proyección admite ser representada por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) & \operatorname{sen}^2(\alpha) \end{pmatrix}$
   b) toda reflexión admite ser representada por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$
   c) la composición de dos reflexiones en rectas por el origen es una rotación con centro el origen cuyo ángulo de rotación es el doble de la resta entre los ángulos que forman las rectas, en que el orden de la resta es el inverso del orden en que se aplican las reflexiones.