5.2. Guía 7

1. Demuestre que si V es un e.v. sobre $\mathbb{R}$ entonces $A_1(V,R) = Hom(V,R)$.
2. Demuestre que si V es e.v. sobre $\mathbb{R}$ y $\{f_1,\dots,f_k\} \subset hom(V,\mathbb{R})$, entonces el producto $\Pi_{i=1}^{k} f_i$ es una forma k-multilineal. ¿Es alternada?
3. Demuestre que si $A \sim B$ mediante escalonamiento (sin reducción), entonces $det(A) = \pm det(B)$.
4. Refute: "Si $det(A_{n\times n}) = det(B_{n\times n})$, entonces $A \sim B$".
5. Analice el siguiente argumento: "Toda matriz antisimétrica tiene determinante cero, ya que si $A^t = -A$, entonces $det(A) = det(A^t) = det(-A) = -det(A)$"
6. Calcule

$$a)\ det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad b)\ det\begin{pmatrix} a & a & a & a+b \\ a & 2a & 2a & a+b \\ 0 & a & 2a & 1 \\ a & a & a & a+b+c \end{pmatrix}$$

7. Demuestre sin desarrollar (sin calcular mediante expansión de Laplace) que $det\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} =$ $a(b-a)(c-b)(d-c)$
8. Demuestre sin desarrollar que $det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} = (a-1)^3(a+3)$
9. Demuestre sin desarrollar, que $det\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$
10. Demuestre sin desarrollar que $det\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3$
11. Demuestre sin desarrollar que $det\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (af - be + cd)^2$
12. Demuestre sin desarrollar que $det\begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix} = b^3(b+4a)$

13. Determine el valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix} = 0$

14. Demuestre sin desarrollar que si A es matriz de $n \times n$ antisimétrica y no singular, entonces n es par.

15. Una matriz cuadrada es llamada **ortogonal** si $A^tA = I$. Demuestre que $det(A) = \pm 1$.

16. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y encuentre A^{-1}.

17. Demuestre que si A es matriz cuadrada que cumple $A^2 + A + I = 0$, entonces A es invertible, y determine su inversa.

18. Demuestre que si $A_{n\times n}$ es invertible, entonces $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

19. Dada una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, sus **valores propios** son los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $det(A-\lambda I) = 0$.

    a) Demuestre que para cada valor propio λ, el conjunto $W_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax^t = \lambda x^t\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$ y es el kernel de la aplicación lineal asociada a $A - \lambda I$. W_λ es el conjunto de vectores propios de λ, también llamado espacio propio de λ para A.

    b) Demuestre que 0 es valor propio de A ssi A no es invertible.

    c) Si $B_{n\times n}$ cumple $B = PAP^{-1}$ para $P_{n\times n}$ invertible, entonces A y B tienen los mismos determinantes y valores propios.

    d) Demuestre que si A es matriz diagonal o triangular, sus valores propios son exactamente los valores de su diagonal.

    e) Demuestre que si $A^2 = A$, entonces los valores propios de A solo pueden ser 1 y/o 0

    f) Calcule los valores y respectivos **vectores** propios de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, y de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso, ¿se puede formar una base de $\mathbb{R}^3$ utilizando sólo valores propios?

20. Utilice la matriz adjunta clásica para encontrar la inversa de la matriz dada, si existe:

    a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$