5.1. Guía 6

1. Determine la matriz de cada aplicación lineal respecto de las bases canónicas respectivas:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + y, x - y)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = 2x + 4y$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$.

   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + 3y, y - 3z, 4x + 3y - z)$.

   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (2, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$

   g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $T(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$, $T(0, 2, 1) = (0, 3, 1)$.

   h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = gen(\{(1, 2, 3), (1, 0, 1)\})$ y $T(0, 1, -1) = (3, 2, 1)$

2. Dada $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ arbitraria, determine los escalares necesarios para que

$$A \in gen\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

3. Determine los valores de s y de t para que las siguientes matrices sean **simétricas** (es decir, iguales a su traspuesta)

   a) $\begin{pmatrix} s & t \\ st & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} s & 2s & st \\ t & -1 & s \\ t & s^2 & s \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$

4. Encuentre la matriz A en cada caso:

   a) $\left(A + 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

   b) $\left(3A^t + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\left(2A - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)^t = 3A^t + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$

   d) $\left(2A^t - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^t = 4A - 9 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Si A es una matriz cuadrada, demuestre que $A + A^t$, AA^t y A^tA son simétricas.

6. Una matriz B es **antisimétrica** si $B^t = -B$.

   a) De dos ejemplos distintos de matrices antisimétricas.

   b) Demuestre que una matriz antisimétrica tiene diagonal cero.

c) Demuestre que toda matriz simétrica o antisimétrica es cuadrada.

d) Demuestre que si A es una matriz cuadrada, entonces $A - A^t$ es antisimétrica.

e) Demuestre que para toda matriz cuadrada A existen matrices B y C únicas para A, con B simétrica y C antisimétrica, tales que $A = B + C$.

7. Demuestre que si A y B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica ssi $AB = BA$

8. Demuestre que $A_{2\times 2}$ cumple $A^tA = AA^t$ ssi A es simétrica o $A \in gen\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right)$

9. La **traza** de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal, denotada $tr(A)$. Demuestre, para A y B matrices $n \times n$ y $\alpha \in K$:

   a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

   b) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$

   c) $tr(A^t) = tr(A)$

   d) $tr(AB) = tr(BA)$

   e) $tr(AA^t) =$ suma de los cuadrados de TODOS los elementos de A

10. Una matriz cuadrada A es **idempotente** si $A^2 = A$. Demuestre:

    a) Si A es idempotente, también lo son $I - A$, y A^t.

    b) Si A es idempotente, $A(I - A) = 0$.

    c) Si $A_{n\times m}$ y $B_{m\times n}$ y $AB = I$, entonces BA es idempotente.

11. Determine una matriz canónica escalonada por filas equivalente por filas a la matriz dada, en cada caso:

    a) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

    e) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

    f) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\5 & 12 & -1\end{pmatrix}$

    g) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\3 & 1 & 1 & 2\\1 & -3 & 3 & 2\end{pmatrix}$

    h) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\3 & -1 & 2 & 1\\1 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

    i) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\3 & 2 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 4\\2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

    j) $\begin{pmatrix}1 & -a & 0 & 0\\0 & 1 & -a & 0\\0 & 0 & 1 & -a\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, con $a \neq 0$