3.2. Guía de la primera parte de espacios vectoriales

1. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos con las operaciones dadas sean espacios vectoriales sobre el cuerpo dado:

   a) $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0 \wedge b > 0\}$, $K = \mathbb{R}$ con $(a,b)+(c,d) = (ac, bd)$ y $\alpha(a,b) = (a^\alpha, b^\alpha)$. `(sí es)`

   b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : deg(p) \leq n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ fijo, $K = \mathbb{R}$, con suma y ponderación de polinomios. `(sí es)`

   c) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : deg(p) \leq n \wedge p(1) = 0\}$, con $n \in \mathbb{N}$ fijo, $K = \mathbb{R}$, con suma y ponderación de polinomios.`(sí es)`

   d) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, 0)$ `(no es)`

   e) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a,b)+(c,d) = (a+d, b+c)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$ `(no es)`

   f) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ y $\alpha(a,b) = (a,b)$ `(no es)`

   g) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a,b)+(c,d) = (ac, bd)$ y $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$ `(no es)`

2. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos sean o no subespacios del e.v. indicado (se asumen las operaciones estándar en cada e.v.):

   a) $W_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = 1\}$

   b) $W_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2+b^2+c^2 \in \mathbb{Z}_0^+\}$

   c) $W_3 = \{v \in \mathbb{R}^4 : \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ v = \alpha(1,-1,0,2) + \beta(0,2,1,-1)\}$

   d) $W_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 2a - 3b = 0\}$

   e) $W_5 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b - c = 0\}$

   f) $W_6 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - b = 0\}$

3. Demuestre que si W_1 y W_2 son subespacios de un e.v. V y $W_1 \cup W_2$ es subespacio de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

4. Demuestre en el e.v. $\mathbb{R}^2$ (al decirlo sin más información, se asume que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$ y las operaciones son las estándar) para todo par de vectores (a,b) y (c,d) se cumple:

$$\{(a,b),(c,d)\} \text{ es l.i. ssi } ad - bc \neq 0$$

5. Demuestre que $(-1, 11) \in \mathbb{R}^2$ es c.l. (combinación lineal) de $\{(1,3),(-2,1)\}$

6. Sea $S = \{(1,1,1),(3,1,0),(2,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Responda justificando:

   a) ¿$(1,3,4) \in gen(S)$?

   b) ¿$(5,3,1) \in gen(S)$?

   c) ¿Es S l.i. o l.d.?

7. Sea V un e.v. sobre un cuerpo K. Suponga que $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ es l.i. Demuestre que $\{(v_1+v_2), (v_2+v_3), (v_3+v_1)\}$ es l.i.