5.3. Guía 8

1. Pruebe que en $M_{m,n}$ la función $tr(AB^t)$ define un p.i. ¿Cómo se expresa la norma que define?

2. Pruebe que en el e.v. de funciones continuas en $[a,b]$ la función $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ define un p.i. ¿Cómo se expresa la norma que define?

3. Demuestre que si V es e.v. real con p.i. entonces el único vector $\vec{v} \in V$ que cumple $\forall\, \vec{w} \in V\ \ \langle \vec{w},\, \vec{v} \rangle = 0$ es el vector $\vec{0}$.

4. Demuestre que si V es e.v. real con p.i., y U es subespacio de V, entonces el compleneto ortogonal de U, $U^{\perp} := \{\vec{v} \in V\ :\ \forall\, \vec{u} \in U\ \ \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle = 0\}$ cumple:

    a) $U^{\perp}$ es subespacio de V
    b) $V = U \oplus U^{\perp}$

5. Sea V e.v. real con p.i. Si $||\vec{v}|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ (norma relativa al p.i.) y $d(\vec{v}, \vec{w}) := ||\vec{v} - \vec{w}||$ (distancia relativa al p.i.) para $\{\vec{v},\, \vec{w}\} \subset V$, demuestre las siguientes propiedades para vectores en V:

    a) $||\vec{v}|| \geq 0$ y $(||\vec{v}|| = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{0})$
    b) para todo $k \in \mathbb{R}\quad ||k\vec{v}|| = |k|||\vec{v}||$
    c) $||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$
    d) $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$ y $(d(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{w})$
    e) $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$
    f) $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$
    g) $||\vec{v}|| - ||\vec{w}|| \leq ||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$
    h) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{4}||\vec{v} + \vec{w}||^2 - \frac{1}{4}||\vec{v} - \vec{w}||$
    i) $||\vec{v}||^2 - ||\vec{w}||^2 = \langle \vec{v} + \vec{w},\, \vec{v} - \vec{w} \rangle$
    j) $||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| \leftrightarrow \langle \vec{v} + \vec{w},\, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0$
    k) $|\langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle| = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \leftrightarrow (\exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ \ \vec{v} = \lambda \vec{w})$

6. Sea V e.v. real con p.i. y sea $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subset V$ un conjunto ortonormal. Demuestre que para todo $\vec{v} \in V$
$$\langle \vec{v},\, \vec{v}_1 \rangle^2 + \langle \vec{v},\, \vec{v}_2 \rangle^2 + \cdots + \langle \vec{v},\, \vec{v}_n \rangle^2 \leq ||\vec{v}||^2$$

7. Demuestre que la función $\langle (x,y),\, (a,b) \rangle := xa - xb - ya + 3by$ define un p.i. en $\mathbb{R}^2$. Determine con tal p.i.:

    a) $\langle (1,1), (2,-2) \rangle$
    b) $||(3,4)||$
    c) el ángulo entre $(1,1)$ y $(-2,2)$
    d) $d\big((1,4),\, (3,2)\big)$
    e) La proyección ortogonal de $(1,3)$ sobre $gen\{(2,5)\}$
    f) Una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

8. Encuentre una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con p.i. canónico que contenga a los vectores $(1,1,1)$ y $(-2,1,1)$.

9. Aplique Gram-Schmidt con p.i. canónico en $\mathbb{R}^3$ a $\{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$

10. En $\mathbb{R}^4$ con p.i. canónico, determine una base de $U^\perp$ si $U = gen\{(0,1,-2,5)\}$

11. Demuestre que, en $\mathbb{R}^3$ con p.i. canónico, $\{(1,1,1),(1,2,-3),(5,-4,-1)\}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y escriba $(1,5,-7)$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

12. Demuestre que si V es e.v. real de dimensión finita con p.i., y U es subespacio de V, entonces el complemento ortogonal de U, $U^\perp := \{\vec{v} \in V \ : \ \forall\, \vec{u} \in U \ \ \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle = 0\}$ cumple:

    a) $U^\perp$ es subespacio de V
    b) $V = U \oplus U^\perp$
    c) Si W es otro subespacio de V, entonces $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

13. Sea V e.v. real con p.i. y sean A y B subconjuntos de V. Demuestre:

    a) Si todo vector de A es ortogonal a todo vector de B ($A \perp B$), entonces $gen(A) \perp gen(B)$.
    b) $A^\perp$ es subespacio de V.
    c) $A \subseteq B$ implica $B^\perp \subseteq A^\perp$.
    d) $A \subseteq A^{\perp\perp}$