4.1. Guía 5. Transformaciones Lineales

1. Para las siguientes funciones demuestre si son aplicaciones lineales o no, y de serlo determine kernel e imagen mostrando bases de cada uno, determine su rango y nulidad, si es inyectiva y/o sobreyectiva, si tiene inversa y en tal caso muéstrela:

   a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ donde $T(u) = (0, \ldots, 0)$ para todo $u \in \mathbb{R}^4$.
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + y, x - y - 1)$.
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = 2x + 4y$.
   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.
   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$.
   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + 3y, y - 3x, 4x + 3y)$.

2. Determine en cada caso, si existe, alguna transformación lineal $T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que

   a) $T(1, 2, 1) = (0, 0, 1)$, $T(2, 0, 0) = (1, 1, 1)$ y $T(4, 4, 2) = (2, 2, 2)$
   b) $T(1, 0, -1) = (10, 5, 0)$, $T(0, 0, 3) = (3, -1, 1)$ y $T(4, 4, 2) = (2, 2, 2)$
   c) $T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$, $T(1, 0, 1) = (0, 0, 1)$ y $T(1, 2, 1) = (0, 0, 1)$
   d) $T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$, $T(1, 0, 1) = (0, 0, 1)$ y $T(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$
   e) $T(1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ y $T(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$

3. Asuma que las funciones siguientes son aplicaciones lineales. Determine kernel e imagen, rango y nulidad e inversa si tienen:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (2, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $T(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$, $T(0, 2, 1) = (0, 3, 1)$.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = gen(\{(1, 2, 3), (1, 0, 1)\})$ y $T(0, 1, -1) = (3, 2, 1)$

4. Sean $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaciones lineales dadas por $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T_1(x, y) = (2x, x - y) \wedge T_2(x, y) = (x, 2y - x)$.

   a) Determine si $T_1 + T_2$ es inyectiva.
   b) Calcule $ker(T_2 \circ T_1)$.

5. Demuestre que si U y V son e.v. de dimensión finita `(aqui todo e.v. es de dimensión finita!)` sobre un cuerpo K, con $dim(U) < dim(V)$ entonces:

   a) La nulidad de toda aplicación lineal en $Hom(V, U)$ es positiva y mayor o igual a $dim(V) - dim(U)$.
   b) No existe aplicación lineal inyectiva en $Hom(V, U)$.
   c) No existe aplicación lineal sobreyectiva en $Hom(U, V)$.
   d) Necesariamente existen aplicaciones lineales inyectivas en $Hom(U, V)$.

e) Necesariamente existen aplicaciones sobreyectivas en $Hom(V,U)$.

f) No puede haber biyecciones en $Hom(U,V)$ ni en $Hom(V,U)$.

6. Asuma que $V = U \oplus W$ con V e.v. sobre un cuerpo K.

   a) Demuestre que la función "proyección en U", $Pr_U : V \to V$ dada por $Pr_U(u+w) = u$ para todos $u \in U$ y $w \in W$ es aplicación lineal, que su imagen es U y que $Pr_U \circ Pr_U = Pr_U$.

   b) Definiendo de modo análogo la proyección Pr_W sobre W, demuestre que $Pr_U + Pr_W = \mathbf{1}_V$ (la función identidad sobre V) y que $Pr_U \circ Pr_W = Pr_W \circ Pr_U = 0_{Hom(V,V)}$ (la aplicación lineal que lleva todo vector al vector cero).

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, y sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$, que cumple $T(v_1) \neq 0$. Pruebe que
$$\left\{ v_2 - \frac{T(v_2)}{T(v_1)} v_1,\ v_3 - \frac{T(v_3)}{T(v_1)} v_1 \right\}$$
   es base de $ker(T)$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal no nula. Demuestre:

   a) Si $T \circ T = 0$ (entiéndase $0_{Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)}$) entonces existe una base $\{v_1,\ v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1) = v_2$ y $T(v_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   b) Si $T \neq \mathbf{1}^2_{\mathbb{R}}$ y $T \circ T = T$, entonces existe una base $\{w_1,\ w_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(w_1) = w_1$ y $T(w_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   c) Determine aplicaciones lineales explícitas que realicen cada caso anterior.

9. Sea $T : V \to V$ aplicación lineal, con V un e.v. Demuestre que:

   a) $ker(T) \subseteq ker(T \circ T)$.

   b) $img(T \circ T) \subseteq img(T)$.

   c) Si $dim(img(T)) = dim(img(T \circ T))$ entonces $img(T \circ T) = img(T)$ y $ker(T) = ker(T \circ T)$ y $ker(T) \cap img(T) = \{0_V\}$.

10. Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto. Sea V un e.v. (de dimensión finita) sobre un cuerpo K. Definiendo el conjunto $F(A,V) := \{f \ :\ f : A \to V\}$ de todas las funciones de A en V, y definiendo suma de funciones por $f + g$ para $\{f, g\} \subset F(A,V)$ dada por $\forall\, x \in A\ ((f+g)(x) := f(x) + g(x))$ y ponderación por escalar αf para $\alpha \in K$ y $f \in F(A,V)$ por $\forall\, x \in A\ ((\alpha f)(x) := \alpha f(x))$, demuestre que $F(A,V)$ es un e.v. sobre K. Pruebe además que si A tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos y $dim(V) = m$, entonces $F(A,V)$ tiene dimensión nm. Pruebe además que existe un isomorfismo (aplicación lineal biyectiva) entre $F(A,V)$ y $\mathbb{R}^{nm}$.

11. Determine una base de $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.