Índice

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS

Álgebra y Geometría II Mat-Fis
Semestre Primavera 2010 Profesor Sergio Muñoz

Bitácora 2010

1. Fracciones parciales

1.1. Cuerpo de cocientes de un anilo de polinomios

Sea A un anillo conmutativo con unidad, sin divisores de cero, y con característica cero. En $A \times (A - \{0\})$ se define la relación: $(a, b) \sim (c, d)$ ssi $ad = bc$.

Se prueba que es relación de equivalencia en $A \times (A - \{0\})$ y que para todo $k \in A - \{0\}$ $(a, b) \sim (ka, kb)$

Se definen en $A \times (A - \{0\})$ las operaciones $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ y $(a, b) + (c, d) := (ad + bc, bd)$ y se prueba que son compatibles con la relación de equivalencia.

Se considera el conjunto cociente $A/\sim := \{[(a, b)]_\sim : (a, b) \in A \times (A - \{0\})\}$ de las clases de equivalencia de la relación en $A \times (A - \{0\})$, y se definen de manera estándar las operaciones suma y producto.

Se prueba que con esas operaciones, que están bien definidas, $A/\sim$ es un cuerpo que contiene una copia isomorfa de A, el conjunto $\{[(a, 1)]_\sim : a \in A\}$.

Los elementos de la estructura cociente se denotan como fracciones $\frac{a}{b}$ en vez de $[(a, b)]_\sim$. En el caso $A = \mathbb{R}[x]$, el cuerpo de cocientes se denota $\mathbb{R}(x)$ y sus elementos son las fracciones algebraicas o funciones racionales.

1.2. Fracciones parciales

Propiedad 1. *1. Dados p y q en $\mathbb{R}[x] - \{0\}$, existen r y s en $\mathbb{R}[x]$ tales que $\frac{p}{q} = s + \frac{r}{q}$, donde $r \equiv 0$ o $gr(r) < gr(q)$.*

2. Dados p y q en $\mathbb{R}[x] - \{0\}$ con $gr(p) < gr(q)$, con $q = q_1 q_2$ para q_1 y q_2 en $\mathbb{R}[x]$ primos relativos de grado positivo, existen r_1 y r_2 en $\mathbb{R}[x]$ tales que

$$\frac{p}{q} = \frac{r_1}{q_1} + \frac{r_2}{q_2}$$

donde $gr(r_1) < gr(q_1)$ y $gr(r_2) < gr(q_2)$.

Hasta aquí la clase del: **4 agosto** Presentación del curso. Cuerpo de cocientes del anillo de polinomios sobre un cuerpo.

1. Sea $\{h, ax + b\} \subset \mathbb{R}[x]$ y sea $m \in \mathbb{N}$ con $gr(h) < m$. Entonces existe $\{A_1, \ldots, A_m\}$ tal que

$$\frac{h}{(ax + b)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

2. Sea $\{h, ax^2+bx+c\} \subset \mathbb{R}[x]$ con ax^2+bx+c irreducible en $\mathbb{R}[x]$, y sea $m \in \mathbb{N}$ con $gr(h) < 2m$. Entonces existe $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\}$ tal que

$$\frac{h}{(ax^2+bx+c)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

1.3. Guía de fracciones parciales

Aplique fracciones parciales de $\mathbb{R}(x)$ a las siguientes fracciones racionales:

1. $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$
2. $\dfrac{x^2+1}{x+1}$
3. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$
4. $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$
5. $\dfrac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2-4)}$
6. $\dfrac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}$
7. $\dfrac{1}{(x-1)^2}$
8. $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$
9. $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$
10. $\dfrac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}$
11. $\dfrac{2x^2+x+1}{(x-1)^3}$
12. $\dfrac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}$
13. $\dfrac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}$
14. $\dfrac{8}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$
15. $\dfrac{4x^2-7x+3}{(x^2-4x+4)(x^2+1)}$
16. $\dfrac{2x^3+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}$
17. $\dfrac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$, para $a \in \mathbb{R}$

Hasta aquí la clase del: **6 agosto 2010** Unicidad de la descomposición. Casos de factores repetidos en la factorización del polinomio del denominador. Ejemplos

2. Introducción al Álgebra Lineal: geometría y vectores en el plano complejo

Recordamos que a cada complejo $z \in \mathbb{C}$ le asociamos el punto $(Re(z), Im(z))$ del plano $\mathbb{R}^2$, y que a cada punto P del plano le asociamos un único vector $\vec{p}$, su vector posición, que es la clase de equivalencia del segmento orientado que va del origen $\mathcal{O}$ del sistema al punto P, es decir, $\vec{\mathcal{O}P}$.

Cada vector, como clase de equivalencia de segmentos orientados, tiene como representante destacado a un segmento orientado de la forma $\vec{\mathcal{O}P}$ para algún punto P del plano, es decir, hay una biyección entre el conjunto de los vectores del plano y el conjunto de puntos del plano. En el caso $P = \mathcal{O}$, se trata del vector nulo $\vec{0}$.

Cada complejo entonces determina un vector y viceversa. En tal sentido, cada complejo se interpreta a la vez como un número, como un punto del plano, y como un vector. Del mismo modo, cada par ordenado de $\mathbb{R}^2$ se interpreta a la vez como un punto del plano, como un vector, y como un número complejo.

Podemos ponderar vectores por números reales, lo que corresponde a multiplicar un complejo por un real, a la vez que podemos sumar vectores mediante la "Ley del paralelógramo", lo que corresponde a la suma de los respectivos complejos.

Dados dos puntos P y Q, el vector que determina el segmento orientado de P a Q, $\vec{PQ}$, cumple $\vec{PQ} = \vec{\mathcal{O}Q} - \vec{\mathcal{O}P}$.

2.1. Rotaciones

Rotaciones con centro el origen como multiplicación compleja: $T(z) = e^{i\alpha}z$, como pares ordenados: $T\big((x,y)\big) = \big(x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha),\, x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha)\big)$, y en notación matricial (vertical):

$$\begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Componer rotaciones en complejos es simple: si $T_1(z) = e^{i\alpha}z$ y $T_2(z) = e^{i\beta}z$, entonces $(T_1 \circ T_2)(z) = e^{i\alpha}\big(e^{i\beta}z\big) = e^{i(\alpha+\beta)}z$. En notación matricial la última igualdad queda

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{sen}(\alpha+\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hasta aquí la clase del: **10 agosto**

Desarrolando esa igualdad, que debe ser válida para todos x e y en $\mathbb{R}$, se da sentido a lo que veremos más adelante como multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) & -\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) \end{pmatrix}$$

En términos generales, sería:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos más operatoria de matrices.

2.2. Proyecciones

Recordando lo visto en el curso anterior,. la proyección de un vector $\vec{p}$ sobre $\vec{q}$, ambos no cero para omitir casos borde, era el vector $P_{\vec{q}}(\vec{p})$ tal que $(\vec{p} - P_{\vec{q}}(\vec{p})) \perp \vec{q}$, de modo que, si $\vec{p}$ es vector posición del punto P y $\vec{q}$ es vector posición del punto Q, entonces $P_{\vec{w}}(\vec{v})$ es vector posición del punto R de la recta que une $\mathcal{O}$ con Q, que es el más cercano a P.

Para perpendicularidad habíamos definido el producto interno complejo por: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := Re(\vec{v} \cdot \overline{\vec{w}})$, el cual cumplía que $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

Se demostraban las propiedades lineales y positiva definida para el producto interno.

Como pares ordenados, el producto interno queda, para $\vec{p} = (x, y)$ y $\vec{q} = (a, b)$,

$$\langle (x, y),\ (a, b) \rangle = ax + by$$

Se puede demostrar que la proyección se calcula mediante producto interno como $P_{\vec{q}}(\vec{p}) = \dfrac{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle} \vec{q}$

Como pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, queda, para $\vec{p} = (x, y)$ y $\vec{q} = (a, b)$, con $\vec{q} \neq \vec{0}$, como

$$P_{\vec{q}}(\vec{p}) = \frac{ax + by}{a^2 + b^2}(a, b) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} x + \frac{ab}{a^2 + b^2} y,\ \frac{ab}{a^2 + b^2} x + \frac{b^2}{a^2 + b^2} y \right)$$

Con notación matricial, queda

$$P_{\vec{q}}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} & \dfrac{ab}{a^2 + b^2} \\ \dfrac{ab}{a^2 + b^2} & \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde el número real $\frac{1}{a^2+b^2}$ se puede multiplicar y/o factorizar por a matriz componente a componente, como veremos más adelante.

2.3. Reflexiones

En $\mathbb{C}$, si T es la reflexión en el eje real, entonces $T(z) = \overline{z}$. En pares ordenados eso es $T(x, y) = (x, -y)$. Pero la reflexión en una recta por el origen requiere algo más: $\dfrac{T(\vec{p}) + \vec{p}}{2} = P_{\vec{w}}(\vec{p})$, donde la recta por el origen es $L = \{\lambda \vec{w} \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $\vec{w} \neq \vec{0}$.

Entonces $T(\vec{p}) = 2P_{\vec{w}}(\vec{p}) - \vec{p}$.

Como pares ordenados, queda

$$\begin{aligned} T\big((x, y)\big) = 2\frac{ax + by}{a^2 + b^2}(a, b) - (x, y) &= \left(\Big(\frac{2a^2}{a^2 + b^2} - 1\Big) x + \frac{2ab}{a^2 + b^2} y,\ \frac{2ab}{a^2 + b^2} x + \Big(\frac{2b^2}{a^2 + b^2} - 1\Big) y \right) \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x + \frac{2ab}{a^2 + b^2} y,\ \frac{2ab}{a^2 + b^2} x + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} y \right) \end{aligned}$$

Entonces matricialmente queda

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hasta aquí la clase del: **11 agosto**

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación del plano y denotemos por $[T]$ a su representación matricial, si es que tiene. De hecho, no toda transformación tiene representación matricial:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (xy, 1)$. Si existe $[T]$, debe cumplirse que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En particular $T(0,0) = (0,1)$, pero $[T]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ debido a las operaciones matriciales, lo que es una contradicción.

Una característica simple de las transformaciones que se representan por matrices es que cada coordenada de la imagen de un vector debe ser combinación lineal de las coordenadas del vector del dominio. Pero más adelante verán que hay conjuntos de vectores (espacios vctoriales) donde la noción de coordenada es difusa. Por ello, las condiciones más generales para que una transfromación, en que los escalares son números reales, se represente por una matriz son:

1. $\forall\, x, y, \lambda \in \mathbb{R}\ \ T\big(\lambda(x,y)\big) = \lambda T(x,y)$
2. $\forall\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\ \ T\big((x,y) + (z,w)\big) = T(x,y) + T(z,w)$

Una transformación que cumpla ambas condiciones se llamará **transformación lineal**. Es de notar que ambas condiciones se cumplen si inducimos una transformación del plano mediante una matriz, es decir, dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si definimos la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por:

$$T(x,y) = (z,w) \Longleftarrow \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

entonces T **es** una transformación lineal del plano y $[T] = A$.

Diremos que P es un punto fijo de la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si $T(P) = P$. Matricialmente, si T es transformación lineal, el conjunto de puntos fijos de T es

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, [T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

pero

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, [T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, [T]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

(donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad, neutro del producto de estas matrices)

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \big([T] - I2\big)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces para encontrar puntos fijos, que son de interés geométrico, mediante matrices, es necesario resolver ecuaciones matriciales de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y aplicando la matriz al vector, ello equivale a resolver $\begin{pmatrix} ax+by \\ \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo cual, igualando coordenadas, queda

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by & =0 \\ cx+dy & =0 \end{array}\right|$$

lo cual es un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para ese tamaño, la solución es fácil; el desafío será resolver sistemas mayores.

Note que los sistemas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by & =0 \\ cx+dy & =0 \end{array}\right|$$

son equivalentes, es decir, tienen las mismas soluciones.

Se pueden caracterizar las soluciones del siguiente modo: si $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, entonces

1. $\forall\, x,y,\lambda \in \mathbb{R}\ \big((x,y) \in W \Rightarrow \lambda(x,y) \in W\big)$
2. $\forall\, x,y,z,w \in \mathbb{R}\ \Big(\big((x,y) \in W \wedge (z,w) \in W\big) \Rightarrow (x,y)+(z,w) \in W\Big)$

Más adelante a un subconjunto no vació de un espaco vectorial que cumpla ambas condiciones se le llamará subespacio vectorial. En $\mathbb{R}^2$, los únicos subespacios son rectas por el origen, todo $\mathbb{R}^2$ y $\{(0,0)\}$. En $\mathbb{R}^3$ se agregan planos por el origen, y así en adelante.

También tenemos la equivalencia de las soluciones de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by & =p \\ cx+dy & =q \end{array}\right|$$

Recordarán de nivel escolar que cada cada ecuación detemina una recta, y entonces el sistema tenía:

1. o bien solución única (rectas que se cortan)
2. o bien no hay solución (rectas paralelas distintas)
3. o bien infinitas soluciones (las ecuaciones corresponden a una misma recta)

Si el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo, es decir, si es de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} ax+by & =0 \\ cx+dy & =0 \end{array}\right|$$

entonces las rectas asociadas a cada ecuación contienen al origen $\mathcal{O}$, por lo cual los casos se reducen a dos: solución única $\{(0,0)\}$, o bien infinitas soluciones (la recta completa)

Más adelante veremos que la caracterización anterior es válida, cambiando la interpretación de cada ecuación. para sistemas de ecuaciones de más incognitas y más ecuaciones.

Definamos el determinante de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como el escalar $ad - bd$. Denotamos determinante por $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (más adelante definiremos determinantes de matrices de mayor dimensión)

Se demuestra (en clases) que $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ ssi el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} ax + by & = 0 \\ cx + dy & = 0 \\ \hline \end{array}\right|$$

tiene solución única $\{(0,0)\}$.

Hasta aquí la clase del: **13 agosto**

2.4. Subespacios invariantes y valores y vectores propios

Definición 1. *Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ no vacío es invariante bajo T ssi $\{T(x,y) \ : \ (x,y) \in A\} = A$*

Claramente el conjunto de puntos fijos de una transformación lineal es un conjunto invariante bajo la transformación lineal.

Pero la idea de conjunto invariante es más amplia: conjuntos cuyos puntos pueden no quedar fijos, pero cuya imagen sigue perteneciendo al conjunto, y que además cada uno de sus puntos es imagen de un punto del conjunto. Por ejemplo, dada una rotación en torno al origen, cada circunferencia centrada en el origen es invariante y si tiene radio positivo, no está formada por puntos fijos.

Si nos concentramos en los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que son invariantes, básicamente pensamos en las rectas por el origen invariantes.

Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y $L = \{\mu(a,b) \ : \ \mu \in \mathbb{R}\}$ una recta por el origen generada por un vector fijo no nulo (a,b). Entonces

$$\begin{aligned} L \text{ es invariante bajo } T &\leftrightarrow \{T(\mu(a,b)) \ : \ \mu \in \mathbb{R}\} = \{\rho(a,b) \ : \ \rho \in \mathbb{R}\} \\ &\leftrightarrow \forall\, \mu \in \mathbb{R} \ \exists\, \rho \in \mathbb{R} \ T(\mu(a,b)) = \rho(a,b) \\ &\leftrightarrow \forall\, \mu \in \mathbb{R} \ \exists\, \rho \in \mathbb{R} \ \mu T(a,b) = \rho(a,b) \\ &\leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \ T(a,b) = \lambda(a,b) \quad \text{ donde } \lambda := \frac{\rho}{\mu} \end{aligned}$$

Ello significa que la recta es invariante cuando la imagen de su generador es un múltiplo del generador. Ello está bien si conocemos la recta y su generador, y simplemente vemos su imagen, pero si sólo conocemos a T y buscamos cuales rectas por el origen son invariantes bajo T, no conocemos λ ni (a,b).

Sin embargo, hay una forma de encontrar λ y a partir de él determinar un generador para las rectas invariantes:

$$\begin{aligned} T(a,b) = \lambda(a,b) &\leftrightarrow [T]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow [T]\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces basta encontrar soluciones no triviales del sistema homogéneo que tiene matriz $\left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, pero aún no conocemos λ.

Pero determinar soluciones no triviales de un sistema con matriz A equivale a que $det(A) = 0$, según probamos antes.

En el caso que nos ocupa, ello significa encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ que cumpla $det\left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

Si $[T] = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, entonces la condición anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} 0 = det\left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= det\left(\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ = det\begin{pmatrix} c_1 - \lambda & c_2 \\ c_3 & c_4 - \lambda \end{pmatrix} &= (c_1 - \lambda)(c_4 - \lambda) - c_2c_3 \\ = \lambda^2 - (c_1 + c_4)\lambda + (c_1c_4 - c_2c_3) & \end{aligned}$$

Pero tal condición requiere entonces que λ sea solución real de un polinomio cuadrático de coeficientes reales, lo que sabemos hacer perfectamente.

Una vez obtenidos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, que serán llamados valores propios de la matriz $[T]$, para encontrar el subespacio invariante basta resolver el sistema de ecuaciones de matriz $\left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ para cada valor de λ, obteniendo en cada caso un subespacio de $\mathbb{R}^2$ llamado subespacio propio, y los vectores de cada subespacio propio se llaman vectores propios de la matriz.

Es de notar que los subespacios triviales $\{(0,0)\}$ y $\mathbb{R}^2$ son invariantes bajo toda transformación lineal. Pero el subespacio $\{(0,0)\}$ no es subespacio propio, ya que para encontrarlo pedimos que $\left([T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tuviera soluciones no triviales.

2.5. Coordenadas polares

Cada punto del plano puede ser descrito mediante su distancia a un punto fijo (polo) y el ángulo que forma con una semrecta fija con el polo en el extremo. En general, el polo será el origen $\mathcal{O}$ y la semirecta será el semieje X no negativo.

Ello indica que un par (ρ, θ) puede ser considerado en coordenadas polares como el punto asociado al complejo $\rho e^{i\theta}$. Note que por periodicidad, exsiten infinitos pares (ρ, θ) para cada punto del plano, y que el origen se describe como $(0, \theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Si no acotamos ρ al conjunto $\mathbb{R}_0^+$, se tiene la siguiente situación para $\rho < 0$:

$$\rho e^{i\theta} = -|\rho| e^{i\theta} = |\rho| e^{i(\theta+\pi)}$$

lo que en polares se establece como que el punto asociado a (ρ, θ) para $\rho < 0$ es la imagen de $(-\rho, \theta)$ reflejada en el origen $\mathcal{O}$ (o rotada en π en torno al origen).

Hasta aquí la clase del: **17 agosto**

2.6. Guía de ejercicios de la introducción y de polares.

1. Determine la matriz de las siguientes transformaciones:

   a) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{\pi}{2}$
   b) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{3\pi}{2}$
   c) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{\pi}{3}$
   d) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $\frac{5\pi}{3}$
   e) Rotación centro $\mathcal{O}$ en ángulo $-\frac{4\pi}{3}$
   f) Proyección en el vector $\vec{w} = 2 + 3i$.
   g) Proyección en el vector $\vec{w} = (-1, 8)$
   h) Proyección en un vector de longitud 1 y ortogonal a $(2, 5)$.
   i) Proyección en la recta de ecuación $2x + 3y = 0$
   j) Proyección en la recta generada por el vector $(4, -3)$
   k) Reflexión en la recta $y = x$
   l) Reflexión en el eje Y
   m) Reflexión en la recta $L = \{\lambda(2, -3) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
   n) Reflexión en la recta de ecuación $5x - 3y = 0$

2. Describa el efecto geométrico de las siguientes matrices, e identifique, si es el caso, si se trata de una Rotación centrada en el origen, una Proyección en una recta por el origen, una Reflexión en una recta por el origen, o ninguna de ellas:

   a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   j) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   k) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Demuestre que toda recta del plano por el origen se puede escribir de la forma $\{(\lambda\cos(\alpha), \lambda\operatorname{sen}(\alpha)) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ donde $\alpha \in [0, \pi[$ es el ángulo que forma la recta con el eje X

4. Usando la afirmación anterior, demuestre que:

   a) toda proyección admite ser representada por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) & \operatorname{sen}^2(\alpha) \end{pmatrix}$

b) toda reflexión admite ser representada por una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$

c) la composición de dos reflexiones en rectas por el origen es una rotación con centro el origen cuyo ángulo de rotación es el doble de la resta entre los ángulos que forman las rectas, en que el orden de la resta es el inverso del orden en que se aplican las reflexiones.

5. Determine valores y vectores propios de:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. Determine valores y vectores propios de las transformaciones del ejercicio 1

7. Determine valores y vectores propios de rotaciones, reflexiones y proyecciones genéricas.

8. ¿Qué características tienen los vectores propios del valor propio 0?, ¿ y del valor propio 1?

9. Determine las coordenadas cartesianas correspondientes a $(4, \pi/6)$ dada en polares, y determine coordenadas polares correspondientes a $(-3, \sqrt{3})$ dada en cartesianas.

10. Grafique en el plano los puntos de coordenadas polares $(2, \pi/2)$, $(4, \pi/3)$, $(-2, \pi/3)$, $(-2, 4\pi/3)$, mostrando el sistema de coordenadas cartesianas, y donde el polo es el origen, y con el eje X no negativo como semirecta.

11. Del mismo modo que en el ejercicio anterior, grafique las curvas correspondientes a las siguientes ecuaciones en polares (en algunbos casos puede servir convertir la ecuación a coordenadas cartesianas):

a) $\rho = 1 - \cos(\theta)$

b) $\rho = 2 - \cos(\theta)$

c) $\rho = 1 + \cos(\theta)$

d) $\rho = 1 - 2\cos(\theta)$

e) $\rho = 1 - \operatorname{sen}(\theta)$

f) $\rho = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$

g) $\rho = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta)$

h) $\rho = 4 - 3\cos(\theta)$

i) $\rho = \sqrt{3} - 2\cos(\theta)$

j) $\rho = \sqrt{3} + 2\operatorname{sen}(\theta)$

k) $\rho = 2\cos(\theta)$

l) $\rho = 4\operatorname{sen}(\theta)$

m) $\rho = 5\cos(2\theta)$

n) $\rho = 5\operatorname{sen}(2\theta)$

ñ) $\rho = -3\operatorname{sen}(3\theta)$

o) $\rho = -\cos(4\theta)$

p) $\rho = 2\operatorname{sen}(4\theta)$

q) $\rho = 6\operatorname{sen}(5\theta)$

r) $\rho = -3\cos(5\theta)$

s) $\rho^2 = 5\cos(2\theta)$

t) $\rho^2 = 5\operatorname{sen}(2\theta)$

u) $\rho^2 = -3\operatorname{sen}(3\theta)$

v) $\rho^2 = -\cos(4\theta)$

w) $\rho = \frac{3}{\cos(\theta - \pi/3)}$

x) $\rho = \frac{4}{\cos(\theta - \pi/4)}$

y) $\rho = \frac{10}{2 + \cos(\theta)}$

3. Espacios vectoriales

Definición 2 (Espacio Vectorial (e.v.))**.** *Sean V un conjunto no vacío y s y p dos funciones, suma y ponderación, tales que $s : V \times V \to V$ y $p : \mathbb{R} \times V \to V$*

(notación: $\vec{v}+\vec{w}$ en vez de $s(\vec{v},\vec{w})$, y $\alpha\vec{v}$ en vez de $p(\alpha,\vec{v})$)

.

Se dice que (V,s,p) es un espacio vectorial real o sobre $\mathbb{R}$ si se cumplen todas las condiciones siguientes:

1. *(V,s) forman un grupo abeliano con neutro $\vec{0}$.*
2. $\forall\,\vec{v}\in V\;\; 1\vec{v}=\vec{v}$
3. $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\;\forall\,\vec{v},\vec{w}\in V\;\; \big(\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}\big)$
4. $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\;\forall\,\vec{v}\in V\;\; \big((\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\big)$
5. $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\;\forall\,\vec{v}\in V\;\; \big(\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}\big)$

Los elementos de un e.v. se denominan vectores, y a fin de diferenciar tipos de objetos involucrados, a los números reales en las ponderaciones se les denomina escalares.

Hasta aquí la clase del: **18 agosto**

Propiedad 2. *Sea V e.v. sobre $\mathbb{R}$. Entonces*

1. $\forall\,\vec{v}\in V\;\; \big(0\vec{v}=\vec{0}\big)$
2. $\forall\,\vec{v}\in V\;\; \big(\vec{v}+(-1)\vec{v}=\vec{0}\big)$
3. $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\;\forall\,\vec{v}\in V\;\; \big(\alpha\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha=0\vee\vec{v}=\vec{0})\big)$

Note que en un e.v. se puede definir recursivamente sumatoria de vectores: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\vec{v_k}$

Definición 3. *Sea V e.v. sobre $\mathbb{R}$. Una combinación lineal de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un vector de la forma $\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$, donde $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$.*

Un vector de la forma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{v_k}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1},\dots\vec{v_n}$ si $\{\alpha_1,\dots\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$.

3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m & =b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right|$$

donde hay n ecuaciones y m incógnitas $x_1,\dots x_m$.

Si $b_1=b_2=\cdots b_n=0$ se dice que es un sistema homogéneo.

Una solución de un sistema de ecuaciones como el anterior es una m-tupla de elementos $(s_1, \ldots s_m) \in \mathbb{R}^m$ que satisface las igualdades del sistema al reemplazar x_i por s_i para cada $i \in \{1, \ldots n\}$. Note que un sistema homogéneo siempre tiene, al menos, la solución trivial $(0, 0, \ldots 0)$

Tomando en cuenta el orden de las ecuaciones, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$ la i-ésima ecuación de tal sistema, $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i$, se denota e_i

Es de notar que para cada $i \in \{1, \ldots n\}$, si So_i es el conjunto solución de la ecuación e_i (es decir, So_i es el conjunto de m-tuplas que satisface la igualdad), entonces la solución So del sistema es $So_1 \cap So_2 \cap \cdots \cap So_n$

Hasta aquí la clase del: **20 agosto**

Las operaciones elementales de ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales como el descrito arriba actúan produciendo un nuevo sistema de ecuaciones lineales, modificando una o dos ecuaciones a la vez, y son de tres tipos:

1. Intercambio de ecuaciones: $e_i \leftrightarrow e_j$ produce otro sistema de ecuaciones lineales en que la i-ésima ecuación es la ecuación e_j del sistema original, en que la j-ésima ecuación del sistema nuevo es la i-ésima ecuación del sistema original, y en que el resto de las ecuaciones no cambia.

2. Ponderación de una ecuación por un escalar no nulo: $e_i \leftarrow ke_i$ (con $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$) que cambia la i-ésima ecuación, $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i$, por la ecuación $(k \cdot a_{i1})x_1 + (k \cdot a_{i2})x_2 + \cdots + (k \cdot a_{im})x_m = (k \cdot b_i)$ y las demás ecuaciones no cambia.

3. Combinación de dos ecuaciones: $e_i \leftarrow e_i + ke_j$, que cambia la i-ésima ecuación por la ecuación $(a_{i1} + k \cdot a_{j1})x_1 + (a_{i2} + k \cdot a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{im} + k \cdot a_{jm})x_m = (b_i + k \cdot b_j)$

Viendo las operaciones elementales como funciones, podemos combinarlas mediante composición, obteniéndo una secuencia de sistemas ecuaciones lineales obtenidos unos de otros por la aplicación, cada vez, de una operación elemental.

Propiedad 3. *El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales no cambia al aplicar una composición de operaciones elementales.*

La propiedad anterior se sustenta en la verificación de que al aplicar cada operación elemental, el conjunto solución del sistema original es subconjunto del conjunto solución del sistema obtenido. Y la transitividad de la relación de subconjunto garantiza que ese comportamiento se mantiene al componer operaciones elementales. Por último, notando que cada operación elemental tiene por inversa a una operación elemental, se logra que el conjunto solución del sistema obtenido sea subconjunto del conjunto solución del sistema original, obteniéndose entonces la igualdad de ellos.

La estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales es, mediante una composición de operaciones elementales, escalonar el sistema. (ver escalonamiento en clase y al Algoritmo de Gauss-Jordan en textos de Álgebra Lineal)

Hasta aquí la clase del: **24 agosto**

Definición 4. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$. Sea S conjunto de vectores tal que $\emptyset \neq S \subseteq V$. Se definen:*

1. *El conjunto generado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales (finitas) de vectores de S:*

$$gen(S) := \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v_k} \ : \ n \in \mathbb{N} \wedge \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} \subset \mathbb{R} \wedge \{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\} \subseteq S \Big\}$$

En tal caso se dice que S genera al conjunto $gen(S)$

2. *S es linealmente independiente (l.i.) ssi para cada subconjunto finito de S, $\{\vec{v_1}, \dots \vec{v_n}\}$, con $n \in \mathbb{N}$, se cumple:*

$$\forall \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v_k} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

3. *S es linealmente dependiente (l.d.) ssi no es l.i*

4. *S es subespacio de V ssi (S, s, p) es un e.v. asumiendo que las operaciones s y p quedan restringidas a S*

5. *S es una base del e.v. V ssi S es finito, es l.i. y $gen(S) = V$ (S genera a V)*

Propiedad 4. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$. Sea S conjunto de vectores tal que $\emptyset \neq S \subseteq V$. Entonces:*

1. *$gen(S)$ es subespacio de V*

2. *S es l.d. ssi existen $n \in \mathbb{N}$, $\{\vec{v_1}, \dots \vec{v_n}\} \subseteq S$ y $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v_k} = \vec{0}$ pero al menos uno de los escalares $\alpha_1, \dots \alpha_n$ no es cero.*

3. *S es subespacio de V ssi $S \neq \emptyset$ y S cerrado bajo suma y ponderación.*

4. *S es subespacio de V ssi $S \neq \emptyset$ y $S = gen(S)$*

Hasta aquí la clase del: **25 agosto**

3.2. Guía de la primera parte de espacios vectoriales

1. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos con las operaciones dadas sean espacios vectoriales sobre el cuerpo dado:

   a) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a > 0 \wedge b > 0\}$, $K = \mathbb{R}$ con $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ y $\alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$. `(sí es)`

   b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \, : \, deg(p) \leq n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ fijo, $K = \mathbb{R}$, con suma y ponderación de polinomios. `(sí es)`

   c) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \, : \, deg(p) \leq n \wedge p(1) = 0\}$, con $n \in \mathbb{N}$ fijo, $K = \mathbb{R}$, con suma y ponderación de polinomios.`(sí es)`

   d) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $\alpha(a, b) = (\alpha a, 0)$ `(no es)`

   e) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a, b) + (c, d) = (a + d, b + c)$ y $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ `(no es)`

   f) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $\alpha(a, b) = (a, b)$ `(no es)`

   g) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, con $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ y $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ `(no es)`

2. Demuestre o refute que los siguientes conjuntos sean o no subespacios del e.v. indicado (se asumen las operaciones estándar en cada e.v.):

a) $W_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a = 1\}$

b) $W_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Z}_0^+\}$

c) $W_3 = \{v \in \mathbb{R}^4 \,:\, \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\, v = \alpha(1,-1,0,2) + \beta(0,2,1,-1)\}$

d) $W_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2a - 3b = 0\}$

e) $W_5 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a + 2b - c = 0\}$

f) $W_6 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a - b = 0\}$

3. Demuestre que si W_1 y W_2 son subespacios de un e.v. V y $W_1 \cup W_2$ es subespacio de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

4. Demuestre en el e.v. $\mathbb{R}^2$ (al decirlo sin más información, se asume que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$ y las operaciones son las estándar) para todo par de vectores (a,b) y (c,d) se cumple:

$$\{(a,b),(c,d)\} \text{ es l.i. ssi } ad - bc \neq 0$$

5. Demuestre que $(-1,11) \in \mathbb{R}^2$ es c.l. (combinación lineal) de $\{(1,3),(-2,1)\}$

6. Sea $S = \{(1,1,1),(3,1,0),(2,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Responda justificando:

   a) ¿$(1,3,4) \in gen(S)$?

   b) ¿$(5,3,1) \in gen(S)$?

   c) ¿Es S l.i. o l.d.?

7. Sea V un e.v. sobre un cuerpo K. Suponga que $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ es l.i. Demuestre que $\{(v_1 + v_2),\, (v_2 + v_3),\, (v_3 + v_1)\}$ es l.i.

Ejemplo 5. *Considere el sistema de ecuaciones lineales*

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right|$$

Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{aligned} \vec{v_1} &:= (a_{11}, a_{21}, \dots a_{n1}) \\ \vec{v_2} &:= (a_{12}, a_{22}, \dots a_{n2}) \\ &\vdots \\ \vec{v_m} &:= (a_{1m}, a_{2m}, \dots a_{nm}) \\ \vec{b} &:= (b_1, b_2, \dots b_n) \end{aligned}$$

Los primeros m *son llamados vectores columna del sistema (piense en la versión matricial del sistema) Entonces un vector* $\vec{x} := (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ *es solución del sistema ssi* $\vec{b} = \sum_{k=1}^{m} x_k \vec{v_k}$

En particular, si $gen(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}\}) = \mathbb{R}^n$*, entonces el sistema tiene solución para todo vector* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$*.*

Definición 5 (Subespacios suma y suma directa)**.** *Sean* U_1 *y* U_2 *subespacios de un e.v.* V *sobre* $\mathbb{R}$*. Definimos:*

1. *El subespacio suma es* $U_1 + U_2 := gen(U_1 \cup U_2)$
2. *Si además se cumple* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$*, se denota* $U_1 \oplus U_2$ *al subespacio suma.*

Propiedad 6. *Sean* U*,* U_1 *y* U_2 *subespacios de un e.v.* V *sobre* $\mathbb{R}$ *con* $U_1 \subseteq U$ *y* $U_2 \subseteq U$*. Entonces:*

1. $U_1 + U_2 = \{\vec{u_1} + \vec{u_2} \ : \ \vec{u_1} \in U_1 \wedge \vec{u_2} \in U_2\}$
2. $U = U_1 \oplus U_2$ *ssi* $\forall \vec{v} \in U \ \exists! \ \vec{u_1} \in U_1 \ \exists! \ \vec{u_2} \in U_2 \ \big(\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{u_2}\big)$

Hasta aquí la clase del: **31 agosto**

3.3. Variedades lineales (o afines)

Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$. Una variedad lineal P es un subconjunto de V tal que para cada par de vectores de P, la recta que los une está contenida en P: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in P \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \vec{v} + \lambda(\vec{w} - \vec{v}) \in P$

El vacío, y cada subespacio vectorial de V son variedades lineales. Cada recta en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y cada plano en $\mathbb{R}^3$ es una variedad lineal, contengan o no al origen.

Teorema 7. *Sean* V *un e.v. sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* P *una variedad lineal. Existe un único subespacio vectorial* W *de* V *tal que para todo* $\vec{v} \in P$ *se cumple* $P = \{\vec{v} + \vec{w} \ : \ \vec{w} \in W\}$ *(se abrevia como* $P = \vec{v} + W$*)*

3.4. Dimensión (finita) de un e.v.

El objetivo es mostrar que en un e.v. generado por una cantidad finita de vectores, todas las bases tienen la misma cantidad de elementos, que se denomina la dimensión del e.v.

Lema 8. *Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más incógnitas que ecuaciones tiene al menos una solución no trivial.*

Propiedad 9. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ generado por n vectores, $n \in \mathbb{N}$. Entonces todo conjunto de más de n vectores es l.d.*

Propiedad 10 (Corolario)**.** *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ generado por n vectores, $n \in \mathbb{N}$. Entonces todo subconjunto l.i. tiene a lo más n vectores.*

Teorema 11. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ que posee una base de n vectores, $n \in \mathbb{N}$. Entonces toda otra base de V tiene n vectores.*

Definición 6 (Dimensión finita)**.** *La dimensión de un e.v. V sobre R generado por una cantidad finita de vectores es la cardinalidad de una base de V.*

La definición no depende de la base escogida gracias al teorema anterior.

Hasta aquí la clase del: **1º septiembre**

Propiedad 12 (Corolarios al lema anterior)**.** *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ generado por n vectores. Entonces:*

1. *Todo conjunto de más de n vectores es l.d.*
2. *Todo conjunto l.i. de vectores tiene a lo más n vectores.*

Teorema 13. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ generado por n vectores. Entonces todas las bases tienen la misma cantidad de vectores.*

Se define la dimensión de un e.v. sobre $\mathbb{R}$ generado por una canitdad finita de vectores como la cardinalidad de cualquiera de sus bases. Se denota $dim(V)$ a la dimensión del e.v. V.

Se demuestra que todo conjunto finito de generadores de un e.v. contiene una base.

Propiedad 14. *Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. Entonces:*

1. *Todo conjunto l.i. de vectores de V se puede extender a una base de V.*
2. *Todo subespacio de V tiene dimensión menor o igual a n.*
3. *Si un subespacio de V tiene dimensión n entonces es igual a V.*
4. *Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces*

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

5. *Un conjunto de n vectores de V es l.i. ssi genera V.*

Hasta aquí la clase del: **21 y 22 septiembre**

3.5. Guía Base y dimensión

1. Determine una base y la dimensión de los siguientes e.v.:

   a) $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \, : \, \exists \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; v = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(0, 2, 1, -1)\}$
   b) $W_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 2a - 3b = 0\}$
   c) $W_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a + 2b - c = 0\}$
   d) $W_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \, : \, a - b = 0\}$
   e) $W_3 \cap W_4$
   f) $W_3 + W_4$
   g) $W_5 = gen(\{(1, 2, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, 4, 0, 0)\})$
   h) $W_6 = gen(\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\})$
   i) $W_5 \cap W_6$
   j) $W_5 + W_6$

2. Pruebe que si V es un e.v. sobre K y $v \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\{v, \alpha v\}$ es l.d.

3. Pruebe que si V es un e.v. sobre K y $v, w \in V$, entonces: $\{v, w\}$ es l.d. ssi existe $\alpha \in K$ con $v = \alpha w$.

4. Determine el valor de k tal que en el e.v. $\mathbb{R}^2$ se cumpla que $\{(2, k - 1), (3, 7)\}$ es l.i.

5. Demuestre que en un e.v. de dimensión finita V, para cada subespacio W existe un subespacio U y tal que $V = W \oplus U$

6. Demuestre que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es l.i., entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5\}$ es l.i. ¿Será cierta la afirmación si en vez de l.i. se tratara de l.d.?

7. Demuestre que en un e.v. V sobre $\mathbb{R}$, si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es l.i. y $\alpha \in (\mathbb{R} - \{0\})$, entonces $\{\vec{v}_1, \; (\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2)\}$ es base de $gen(\{(\vec{v}_1 + n\vec{v}_2) \; : \; n \in \mathbb{N}\})$

8. En el e.v. $\mathbb{R}^2$, describa y determine una base para $gen(\{(1, 2)\}) + gen(\{(3, 1)\})$ y para $gen(\{(1, 2)\}) + gen(\{(3, 1)\})$.

9. Si U y W son subespacios del e.v. V tales que $U \subseteq W$ y $dim(U) = dim(W)$, pruebe que $U = W$.

10. En el e.v. $\mathbb{R}^3$:

    a) Pruebe que $gen(\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}) = gen(\{(2, 3, 1), (1, 3, 2)\})$.
    b) Pruebe que $\{(1, 1, 0), (2, 3, 1)\}$ es l.i. y extienda ese conjunto a una base de $\mathbb{R}^3$

11. Sea W un subespacio el e.v. V. Definiendo la relación en V: $v \sim w$ ssi $v - w \in W$, demuestre que se trata de una relación de equivalencia en V y describa la clase de equivalencia de un elemento. Ejemplifique con un subespacio de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ y describa la clase de equivalencia de los vectores de $\mathbb{R}^3$.

12. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ donde $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a = b = c\}$ y $W = \{(0,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \{b,c\} \subset \mathbb{R}\}$

13. Demuestre que si W es subespacio de un e.v. V sobre $\mathbb{R}$ entonces $W + W = W$

14. Demuestre que si W y U son subespacios de un e.v. V sobre $\mathbb{R}$ y U es subespacio de W, entonces $U + W = W$

15. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ con $dim(V) = 6$ y sean U y W subespacios de V ambos de dimensión 4. Determine las dimensiones posibles de $U \cap W$.

16. Demuestre que no es posible la siguiente situación:

    $a)$ V e.v. de dimensión 5 sobre $\mathbb{R}$

    $b)$ U subespacio de V de dimensión 3

    $c)$ W subespacio de V de dimensión 1

    $d)$ $V = U + W$

17. Calcule dim $U \cap W$ si $V = U + W$ donde $dim(V) = 7$ y $dim(W) + dim(U) = 11$

18. Determine una base de $U \cap W$ si U y W son subespacios de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 3 cada uno, y $\{(1,0,-2,1),(2,3,4,5),(0,-3,-4,-3),(1,6,14,7)\} \subset W \cap U$

4. Transformaciones Lineales

Definición 7. *Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Una función $T : V \to U$ se llama transformación lineal (t.l.) de V en U ssi*

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \Big(T(\vec{v} + \vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w}) \quad \wedge \quad T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) \Big)$$

Según la definición, si $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, entonces

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(\vec{v_k})$$

Propiedad 15. *Si V y U son espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y T una t.l. de V en U, y $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\} \subset V$ es l.d. entonces $\{T(\vec{v_1}), \ldots, T(\vec{v_n})\}$ es l.d.*

Un corolario es que si las imágenes de un conjunto finito de vectores es l.i. entonces los vectores iniciales son l.i.

También se obtiene que si B es base de V y $T : V \to U$ es t.l. entonces para calcular las imágenes de vectores de V por T basta conocer las imágenes de la base, y realizar combinaciones lineales.

Definición 8. *Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to U$ una t.l.*

1. *La imagen de T es el conjunto imagen $img(T) := \{T(\vec{v}) \ : \ \vec{v} \in V\}$*
2. *El núcleo o kernel de T es el conjunto $ker(T) := \{\vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \overrightarrow{0_U}\}$*

Se demuestra que núcleo e imagen de una t.l. son subespacios de los respectivos espacios dominio y codominio.

Dados los e.v. U y V sobre $\mathbb{R}$, sea $Hom(V, U)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en U.

Hasta aquí la clase del: **28 septiembre**

Teorema 16 (Dimensiones de Núcleo e Imagen)**.** *Sean U y V e.v. sobre $\mathbb{R}$ y sea $T : U \to V$ una t.l. Entonces*

$$dim(U) = dim(ker(T)) + dim(img(T))$$

Se dice que la nulidad de T, $n(T)$, es $dim(ker(T))$, y que el rango de T, $r(T)$, es $dim(img(T))$.

El teorema anterior indica entonces que la dimensión del dominio es la suma de nulidad y rango de T

Se cumple además que una t.l. $T : U \to V$ es inyectiva ssi $n(T) = 0$

También se tiene que la t.l. $T : U \to V$ es sobreyectiva ssi $r(T) = dim(V)$

Hasta aquí la clase del: **29 septiembre**

Se dice que una t.l. es un isomorfismo ssi es inyectiva y sobreyectiva.

Note que una t.l. $T : V \to V$ es inyectiva ssi es sobreyectiva.

Dotamos a $Hom(U, V)$ de operaciones suma y ponderación del siguiente modo:

- Para T_1 y T_2 en $Hom(U, V)$, se define $T_1 + T_2 \in Hom(U, V)$ por $\forall \vec{v} \in U \ (T_1 + T_2)(\vec{v}) := T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})$

- Para todo $T \in Hom(U,V)$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $\alpha T \in Hom(U,V)$ por $\forall \vec{v} \in U \ \ (\alpha T)(\vec{v}) := \alpha T(\vec{v})$

Con esas operaciones se obtiene que $Hom(U,V)$ es un espacio vectorial, que siempre contiene al neutro $0_{Hom(U,V)}$ que es la t.l. que cumple $\forall \vec{v} \in V \ \ 0_{Hom(U,V)}(\vec{v}) = 0_V$

Dadas $T_1 \in Hom(U,V)$ y $T_2 \in hom(V,W)$, su composición es una t.l. en $Hom(U,W)$

Hasta aquí la clase del: **1º octubre**

4.1. Guía de Transformaciones Lineales

1. Para las siguientes funciones demuestre si son aplicaciones lineales o no, y de serlo determine kernel e imagen mostrando bases de cada uno, determine su rango y nulidad, si es inyectiva y/o sobreyectiva, si tiene inversa y en tal caso muéstrela:

   a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ donde $T(u) = (0, \ldots, 0)$ para todo $u \in \mathbb{R}^4$.
   b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + y, x - y - 1)$.
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = 2x + 4y$.
   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$.
   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}\ T(x, y, z) = (x + y + z, 2x - z)$.
   g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T(x, y) = (x + 3y, y - 3z, 4x + 3y - z)$.

2. Determine en cada caso, si existe, alguna transformación lineal $T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que

   a) $T(1, 2, 1) = (0, 0, 1)$, $T(2, 0, 0) = (1, 1, 1)$ y $T(4, 4, 2) = (2, 2, 2)$
   b) $T(1, 0, -1) = (10, 5, 0)$, $T(0, 0, 3) = (3, -1, 1)$ y $T(4, 4, 2) = (2, 2, 2)$
   c) $T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$, $T(1, 0, 1) = (0, 0, 1)$ y $T(1, 2, 1) = (0, 0, 1)$
   d) $T(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$, $T(1, 0, 1) = (0, 0, 1)$ y $T(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$
   e) $T(1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ y $T(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$

3. Asuma que las funciones siguientes son aplicaciones lineales. Determine kernel e imagen, rango y nulidad e inversa si tienen:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (2, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $T(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $T(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$, $T(0, 2, 1) = (0, 3, 1)$.
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = 0\} = gen(\{(1, 2, 3), (1, 0, 1)\})$ y $T(0, 1, -1) = (3, 2, 1)$

4. Sean $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaciones lineales dadas por $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ T_1(x, y) = (2x, x - y) \wedge T_2(x, y) = (x, 2y - x)$.

   a) Determine si $T_1 + T_2$ es inyectiva.
   b) Calcule $ker(T_2 \circ T_1)$.

5. Demuestre que si U y V son e.v. de dimensión finita `(aqui todo e.v. es de dimensión finita!)` sobre un cuerpo K, con $dim(U) < dim(V)$ entonces:

   a) La nulidad de toda aplicación lineal en $Hom(V, U)$ es positiva y mayor o igual a $dim(V) - dim(U)$.
   b) No existe aplicación lineal inyectiva en $Hom(V, U)$.
   c) No existe aplicación lineal sobreyectiva en $Hom(U, V)$.
   d) Necesariamente existen aplicaciones lineales inyectivas en $Hom(U, V)$.

e) Necesariamente existen aplicaciones sobreyectivas en $Hom(V, U)$.

f) No puede haber biyecciones en $Hom(U, V)$ ni en $Hom(V, U)$.

6. Asuma que $V = U \oplus W$ con V e.v. sobre un cuerpo K.

   a) Demuestre que la función "proyección en U", $Pr_U : V \to V$ dada por $Pr_U(u+w) = u$ para todos $u \in U$ y $w \in W$ es aplicación lineal, que su imagen es U y que $Pr_U \circ Pr_U = Pr_U$.

   b) Definiendo de modo análogo la proyección Pr_W sobre W, demuestre que $Pr_U + Pr_W = \mathbf{1}_V$ (la función identidad sobre V) y que $Pr_U \circ Pr_W = Pr_W \circ Pr_U = 0_{Hom(V,V)}$ (la aplicación lineal que lleva todo vector al vector cero).

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, y sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$, que cumple $T(v_1) \neq 0$. Pruebe que
$$\left\{ v_2 - \frac{T(v_2)}{T(v_1)} v_1,\; v_3 - \frac{T(v_3)}{T(v_1)} v_1 \right\}$$
es base de $ker(T)$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal no nula. Demuestre:

   a) Si $T \circ T = 0$ (entiéndase $0_{Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)}$) entonces existe una base $\{v_1,\, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(v_1) = v_2$ y $T(v_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   b) Si $T \neq \mathbf{1}^2_{\mathbb{R}}$ y $T \circ T = T$, entonces existe una base $\{w_1,\, w_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(w_1) = w_1$ y $T(w_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   c) Determine aplicaciones lineales explícitas que realicen cada caso anterior.

9. Sea $T : V \to V$ aplicación lineal, con V un e.v. Demuestre que:

   a) $ker(T) \subseteq ker(T \circ T)$.

   b) $img(T \circ T) \subseteq img(T)$.

   c) Si $dim(img(T)) = dim(img(T \circ T))$ entonces $img(T \circ T) = img(T)$ y $ker(T) = ker(T \circ T)$ y $ker(T) \cap img(T) = \{0_V\}$.

10. Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto. Sea V un e.v. (de dimensión finita) sobre un cuerpo K. Definiendo el conjunto $F(A, V) := \{f \,:\, f : A \to V\}$ de todas las funciones de A en V, y definiendo suma de funciones por $f + g$ para $\{f, g\} \subset F(A, V)$ dada por $\forall\, x \in A\ ((f + g)(x) := f(x) + g(x))$ y ponderación por escalar αf para $\alpha \in K$ y $f \in F(A, V)$ por $\forall\, x \in A\ ((\alpha f)(x) := \alpha f(x))$, demuestre que $F(A, V)$ es un e.v. sobre K. Pruebe además que si A tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos y $dim(V) = m$, entonces $F(A, V)$ tiene dimensión nm. Pruebe además que existe un isomorfismo (aplicación lineal biyectiva) entre $F(A, V)$ y $\mathbb{R}^{nm}$.

11. Determine una base de $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

5. Matrices

Una matriz de coeficientes reales y de n filas y m columnas, es una función del conjunto $X := \{(i,j) \ : \ \{i,j\} \subset \mathbb{Z} \wedge 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq m\}$ en $\mathbb{R}$.

Si A es una de tales matrices, se denota $a_{i\,j}$ a la imagen de (i,j), y se indica $A_{n\times m}$ para indicar su dominio.

El conjunto de matrices de coeficientes reales y de n filas y m columnas se denota $\mathbb{M}_{n,m}[\mathbb{R}]$, o $M_{n,m}$ para abreviar.

Cada matriz $A \in M_{n,m}$ se representa visualmente por una malla bidimensional en que en la posición que intersecta a la fila i con la columna j se encuentra el elemento $a_{i\,j}$, del siguiente modo:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

Se abrevia también $A_{n\times m} = \left(a_{i\,j}\right)_{n\times m}$. Por ejemplo, $\left(i+j\right)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

De acuerdo al problema 10 de la última guía, $M_{n,m}$ forma un e.v. sobre $\mathbb{R}$.

Según problema 10 de la última guía, la suma y ponderación de matrices adopta las siguientes representaciones, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\{A,B\} \subset M_{n,m}$:

$$\alpha A_{n\times m} = \alpha \left(a_{i\,j}\right)_{n\times m} = \left(\alpha a_{i\,j}\right)_{n\times m}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1\,1} & \alpha a_{1\,2} & \cdots & \alpha a_{1\,m} \\ \alpha a_{2\,1} & \alpha a_{2\,2} & \cdots & \alpha a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n\,1} & \alpha a_{n\,2} & \cdots & \alpha a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

y

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = \left(a_{i\,j}\right)_{n\times m} + \left(b_{i\,j}\right)_{n\times m} = \left(a_{i\,j} + b_{i\,j}\right)_{n\times m}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1\,1} & b_{1\,2} & \cdots & b_{1\,m} \\ b_{2\,1} & b_{2\,2} & \cdots & b_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n\,1} & b_{n\,2} & \cdots & b_{n\,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\,1}+b_{1\,1} & a_{1\,2}+b_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m}+b_{1\,m} \\ a_{2\,1}+b_{2\,1} & a_{2\,2}+b_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m}+b_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1}+b_{n\,1} & a_{n\,2}+b_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m}+b_{n\,m} \end{pmatrix}$$

Note que la suma de matrices requiere que las matrices tengan la misma forma, es decir, la misma cantidad de filas y la misma cantidad de columnas.

La matriz cero de n por m (n filas por m columnas) se denota $0_{n\times m}$ y se define por $0_{n\times m} := (0)_{n\times m}$

Una matriz fila es una matriz en $M_{1,m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$

Una matriz columna es una matriz en $M_{n,1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$

A cada matriz $A_{n\times m}$ le asociamos las n matrices fila definidas por $f_i(A) = \left(a_{i\,j}\right)_{1\times m} = \left(a_{i\,1}, \ldots, a_{i\,m}\right)$ donde $i \in \{1, \ldots n\}$.

A cada matriz $A_{n\times m}$ le asociamos las m matrices columna definidas por $c_j(A) = \left(a_{i\,j}\right)_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{1\,j} \\ \vdots \\ a_{n\,j} \end{pmatrix}$ donde $j \in \{1, \ldots m\}$.

El producto de una matriz fila $A_{1\times p}$ por una matriz columna $B_{p\times 1}$, con $p \in \mathbb{N}$, es:

$$A_{1\times p} \cdot B_{p\times 1} := \sum_{k=1}^{p} a_{1\,k} b_{k\,1}$$

Visualmente

$$\left(a_{1\,1}, \ldots, a_{1\,p}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_{1\,1} \\ \vdots \\ b_{p\,1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{1\,k} b_{k\,1}$$

El producto de matrices $A_{n\times p}$ y $B_{p\times m}$, definido sólo para esas formas, es: $AB = \left(d_{i\,j}\right)_{n\times m}$ donde

$$d_{i\,j} = f_i(A) \cdot c_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k} b_{k\,j}$$

Una matriz cuadrada es aquella que tiene igual cantidad de filas que de columnas.

La matriz identidad de tamaño $n \in \mathbb{N}$ es la matriz cuadrada $I_n := (\delta_{i\,j})_{n\times n}$ donde $\delta_{i\,j}$ es el delta de Kronecker: $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Propiedad 17. *El producto de matrices cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si $A \in M_{n,p}$ y $\{B, C\} \subset M_{p,m}$, entonces $A(B + C) = AB + AC \in M_{n,m}$*
2. *Si $A \in M_{p,m}$ y $\{B, C\} \subset M_{n,p}$, entonces $(B + C)A = BA + CA \in M_{n,m}$*
3. *Si $A \in M_{n,m}$, entonces $A \cdot I_m = A = I_n \cdot A$*
4. *Si $A \in M_{n,m}$, $B \in M_{m,p}$ y $C \in M_{p,q}$, entonces $A(BC) = (AB)C \in M_{n,q}$*
5. *Si $A \in M_{n,m}$, $B \in M_{m,p}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \in M_{n,p}$*

Hasta aquí la clase del: **5 octubre**