3.5. Guía Base y dimensión

1. Determine una base y la dimensión de los siguientes e.v.:

   a) $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \,:\, \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; v = \alpha(1,-1,0,2) + \beta(0,2,1,-1)\}$
   b) $W_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2a - 3b = 0\}$
   c) $W_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a + 2b - c = 0\}$
   d) $W_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a - b = 0\}$
   e) $W_3 \cap W_4$
   f) $W_3 + W_4$
   g) $W_5 = gen(\{(1,2,3,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1),(2,4,0,0)\})$
   h) $W_6 = gen(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1)\})$
   i) $W_5 \cap W_6$
   j) $W_5 + W_6$

2. Pruebe que si V es un e.v. sobre K y $v \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\{v, \alpha v\}$ es l.d.

3. Pruebe que si V es un e.v. sobre K y $v, w \in V$, entonces: $\{v, w\}$ es l.d. ssi existe $\alpha \in K$ con $v = \alpha w$.

4. Determine el valor de k tal que en el e.v. $\mathbb{R}^2$ se cumpla que $\{(2, k-1), (3, 7)\}$ es l.i.

5. Demuestre que en un e.v. de dimensión finita V, para cada subespacio W existe un subespacio U y tal que $V = W \oplus U$

6. Demuestre que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es l.i., entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5\}$ es l.i. ¿Será cierta la afirmación si en vez de l.i. se tratara de l.d.?

7. Demuestre que en un e.v. V sobre $\mathbb{R}$, si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es l.i. y $\alpha \in (\mathbb{R} - \{0\})$, entonces $\{\vec{v}_1,\ (\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2)\}$ es base de $gen(\{(\vec{v}_1 + n\vec{v}_2) \ :\ n \in \mathbb{N}\})$

8. En el e.v. $\mathbb{R}^2$, describa y determine una base para $gen(\{(1,2)\}) + gen(\{(3,1)\})$ y para $gen(\{(1,2)\}) + gen(\{(3,1)\})$.

9. Si U y W son subespacios del e.v. V tales que $U \subseteq W$ y $dim(U) = dim(W)$, pruebe que $U = W$.

10. En el e.v. $\mathbb{R}^3$:

    a) Pruebe que $gen(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) = gen(\{(2,3,1),(1,3,2)\})$.
    b) Pruebe que $\{(1,1,0),(2,3,1)\}$ es l.i. y extienda ese conjunto a una base de $\mathbb{R}^3$

11. Sea W un subespacio el e.v. V. Definiendo la relación en V: $v \sim w$ ssi $v - w \in W$, demuestre que se trata de una relación de equivalencia en V y describa la clase de equivalencia de un elemento. Ejemplifique con un subespacio de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ y describa la clase de equivalencia de los vectores de $\mathbb{R}^3$.

12. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ donde $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a = b = c\}$ y $W = \{(0, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \{b, c\} \subset \mathbb{R}\}$
13. Demuestre que si W es subespacio de un e.v. V sobre $\mathbb{R}$ entonces $W + W = W$
14. Demuestre que si W y U son subespacios de un e.v. V sobre $\mathbb{R}$ y U es subespacio de W, entonces $U + W = W$
15. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ con $dim(V) = 6$ y sean U y W subespacios de V ambos de dimensión 4. Determine las dimensiones posibles de $U \cap W$.
16. Demuestre que no es posible la siguiente situación:

    a) V e.v. de dimensión 5 sobre $\mathbb{R}$

    b) U subespacio de V de dimensión 3

    c) W subespacio de V de dimensión 1

    d) $V = U + W$
17. Calcule dim $U \cap W$ si $V = U + W$ donde $dim(V) = 7$ y $dim(W) + dim(U) = 11$
18. Determine una base de $U \cap W$ si U y W son subespacios de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 3 cada uno, y $\{(1, 0, -2, 1), (2, 3, 4, 5), (0, -3, -4, -3), (1, 6, 14, 7)\} \subset W \cap U$