4.5. Guía 7

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Para las siguientes series geométricas, calcule la suma parcial s_n y el valor de la serie si esta converge.

   a) $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots$

   b) $3+\frac{3}{-4}+\frac{3}{(-4)^2}+\ldots$

   c) $0{,}37+0{,}0037+0{,}000037+\ldots$

   d) $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^n$

   e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$

   f) $\sum_{n=3}^{\infty}2^{-n}3^{n-2}$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{1-2n}$

   h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$

2. Decida si son convergentes o divergentes cada una de la siguientes series. Demuestre su respuesta.

   1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$
   R converge absolutamente

   2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$
   R converge condicionalmente

   3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$
   R converge condicionalmente

   4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$
   R diverge

   5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$
   R diverge

   6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$
   R converge absolutamente

   7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$
   R diverge

   8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$
   R diverge

   9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$
   R diverge

   10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$
   R converge absolutamente

   11) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^n}$
   R converge absolutamente

   12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$
   R diverge

   13) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$
   R diverge

   14) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$
   R diverge

   15) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$
   R converge absolutamente

   16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}$
   R converge absolutamente

   17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$
   R converge absolutamente

   18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$
   R converge absolutamente

   19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$
   R diverge

   20) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
   R converge absolutamente

   21) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
   R diverge

3. Decida si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Demuestre su respuesta

4. Dado un número $a > 0$ considere la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$
demuestre que si $a > e$ la serie diverge y si $a < e$ la serie converge.

5. Demuestre que si $a_n \geq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (na_n) = r \neq 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

6. Demuestre el criterio de condensación: si $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ para todo n, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge. Use ese criterio para estudiar la convergencia de las series
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$
¿Puede demostrar la convergencia o divergencia de estas series con otro criterio demostrado en clase?

7. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes, ¿es cierto que $\sum a_n b_n$ es convergente?

8. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series divergentes, ¿es cierto que $\sum a_n b_n$ es divergente?

9. Suponga que las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$ son acotadas, y que $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente con $\lim b_n = 0$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

10. Use la fórmula de Taylor para calcular $\operatorname{sen}(0,1)$ con un error inferior a 10^{-3}. Demuestre que su error es menor a 10^{-3}.

11. Use la fórmula de Taylor para calcular $\operatorname{sen}(1)$ con un error inferior a 10^{-6}. Demuestre que su error es menor a 10^{-6}.

12. Use la fórmula de Taylor para calcular $\operatorname{sen}(0,01 + \pi/6)$ con un error inferior a 10^{-4}. Demuestre que su error es menor a 10^{-4}.

13. Sea f una función con derivadas de orden 5 en $\mathbb{R}$. Suponga que $T(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ es igual al polinomio de Taylor para f de orden 3 en torno a $c = 3$, pero ya simplificadas las potencias de $(x - 3)$.

    Demuestre que f tiene un mínimo local en $x = 3$

    Sugerencia: recuerde la relación entre las derivadas de una función y de su polinomio de Taylor en c...