4.4. Guía 6

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Utilice sustituciones trigonométricas para calcular:

   a) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

   e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$

   f) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx$

   g) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$

   i) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$

   j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

   k) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

   l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$

2. Utilice fracciones parciales para calcular:

   a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)}dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{3}{x^4+1}dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x+4)^2}dx$

   i) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^4(x)-16}dx$

   j) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-20}{x^2+x-6}dx$

   k) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x-2}dx$

   l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)(4\cos^2(x)-1)}{\cos(x)(1+2\cos^2(x)+\cos^4(x))}dx$

   m) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-16}dx$

3. Calcule las siguientes integrales si es posible

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^{-4/5}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 x^{-7/3}dx$

   c) $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha dx$

   d) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

   e) $\displaystyle\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}}dx$

   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

4. Determine si las siguientes integrales impropias existen o no.

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x/2}}{x^2}\,dx$

d) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x} dx$

f) $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^3} dx$

g) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x}$

h) $\int_1^{2} \frac{dx}{\log x}$

i) $\int_1^{2} \frac{\log x}{x-1} dx$

j) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

k) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0,5}} dx$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x\mathrm{sen} x} dx$

m) $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

n) $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

ñ) $\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

o) $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$

5. Averigue si las siguientes integrales impropias existen. En caso positivo, calcúlelas.

   a) $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}\, dx$

   b) $\int_{-1}^{0} (1+x)^{-1/2} dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

   d) $\int_{-4}^{\infty} e^{-x/2} dx$

   e) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x/2} dx$

   f) $\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} dx$

   g) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x}$

   h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$

   i) $\int_0^{\pi/2} \cot\theta d\theta$

6. Diga para que valores de $r \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\int_{-1}^{0} |x|^r\, dx$ existe.

7. Diga para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha}\, dx$ existe.

8. Use un cambio de variables para averiguar si las siguientes integrales impropias convergen.

   a) $\int_0^{\infty} \cos\left(t^2\right) dt$

   b) $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}(e^x) dx$

   c) $\int_0^{\infty} x\cos(x^2) dx$

   Observar que en ninguno de los casos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

9. Demuestre que $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ no depende de a.

10. Sea $f(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx, n \geq 0$.

    a) Muestre que $f(n+1)$ existe para $n = 0, 1, 2$.

    b) Pruebe que $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$ existe para todo número natural n.

    c) Pruebe que si $n \geq 2$ entonces $f(n+1) = nf(n)$.

    d) Pruebe que para todo natural n se cumple $f(n+1) = n!$

11. Calcule el volumen de los siguientes sólidos.

    a) Una pirámide de base triángular equilatera de lado 10 cm y altura 20 cm.

b) El elipsoide $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

c) El elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

12. Calcule el largo de la siguientes curvas:

a) $y = \dfrac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}, \qquad 1 \leq x \leq 3$

b) $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \qquad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$

c) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\log x}{4}, \qquad 2 \leq x \leq 4$

13. Sea R la región encerrada por el eje x y la parábola $y = 3x - x^2$. Calcule el volumen de los siguientes sólidos de revolución:

a) La región R gira en torno al eje x.

b) La región R gira en torno al eje y.

c) La región R gira en torno a la recta $x = -1$.

14. Sea R una de las regiones encerradas entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

Calcule el área de R. Calcule el volumen de los siguientes sólidos de revolución:

a) La región R gira en torno al eje x.

b) La región R gira en torno al eje y.

15. Determine el volumen del sólido obtenido al girar la curva $y = xe^{-x}, 0 \leq x < \infty$ en torno al eje x.

16. Determine el volumen del sólido obtenido al girar la curva $y = xe^{-x}, 0 \leq x < \infty$ en torno al eje y.

17. Considere la región R bajo la curva $y = 1/x$ y sobre el eje x para $1 \leq x < \infty$.

a) Calcule el área de R.

b) Calcule el volumen del sólido obtenido al girar R en torno al eje x.

c) Calcule el volumen del sólido obtenido al girar R en torno al eje y.

18. Sean $0 < r < R$. Calcule el volumen del toro obtenido al girar el disco $(x - R)^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq r^2$ en torno al eje y.

19. Un agujero de radio r se perfora a través del centro de una esfera de radio R. Encuentre el volumen de lo que queda de la esfera.

20. Un bol tiene la forma de media esfera con un diámetro de 30cm. Una bola de diámetro 10cm se coloca dentro y se llena el bol con agua hasta una altura de $h$cm. Calcule el volumen de agua en el bol.

21. Encuentre el volumen en común de dos esferas de igual radio si el centro de una se encuentra en la superficie de la otra.

22. Encuentre la longitud del arco de la curva dada entre los puntos A y B

a) $y^2 = (x - 1)^3, \qquad A = (1, 0),\ B = (2, 1)$

b) $12xy = 4y^4 + 3, \qquad A = (\dfrac{7}{27}, 1),\ B = (\dfrac{67}{24}, 2)$