## 4.3. Guía 5

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Calcule
$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t} dt$$
(sugerencia: busque el límite asociado a una derivada y piense en TFC...)

2. Calcule la derivada de $\displaystyle\int_0^x (x-t)\operatorname{sen}(t^2)\,dt$

3. Calcule la segunda derivada de $\displaystyle\int_1^x x\operatorname{sen}(t^2)\,dt$

4. Demuestre que si $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(x)\,dt$, entonces
$$g''(x) + g(x) = 2f(x)\cos(x) + f'(x)\operatorname{sen}(x)$$

5. Demuestre que si $f(x)$ es continua y es decreciente en $[a,b]$, entonces la función
$$g(u) = \frac{\int_a^u f(t)\,dt}{u-a}$$
con $a < u \leq b$, es también decreciente en $]a,b]$

6. Demuestre que $\forall\, x > -1$ $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}$

7. Demuestre que $\forall\, x > 1$ $\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x-\sqrt{x^2-1})$

8. Definimos para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, y todo $x > 0$ la función $\log_a(x) := \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Demuestre:

   *a*) $\log_a(1) = 0$
   *b*) $\log_a$ es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$, y $\dfrac{d\log_a(x)}{dx} = \dfrac{1}{x\ln(a)}$
   *c*) $\log_a$ es inyectiva y monótona estricta en $\mathbb{R}^+$.
   *d*) $\log_a$ creciente estricta si $a > 1$, y decreciente estricta si $0 < a < 1$
   *e*) `(corregido)`
   $\displaystyle\int \log_a(x)dx = x\Big(\log_a(x) - \frac{1}{\ln(a)}\Big) + C$
   *f*) $\forall\, x > 0$ $a^{\log_a(x)} = x$
   *g*) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\log_a(a^x) = x$

9. Calcule las siguientes integrales indefinidas (usando todos los métodos vistos hasta ahora):

   *a*) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x}dx$
   *b*) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{2x^3-3x^2+24x-12}dx$
   *c*) $\displaystyle\int \ln^2(x)dx$
   *d*) $\displaystyle\int \ln^3(x)dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^x} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{a^x}{b^x} dx$

g) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(e^x) dx$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx$

k) $\displaystyle\int x e^{-x^2} dx$

l) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

m) $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$

ñ) $\displaystyle\int \cos(\ln(x)) dx$

10. Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

b) $\displaystyle\ln\left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x$

`(defina` $f(x)^{g(x)} := e^{g(x)\ln(f(x))}$ `para` $f(x) > 0$`)`

e) $(x^x)'$

f) $\displaystyle\lim_{a \to b} \frac{a^x - b^x}{a - b}$, $x$ fijo

11. Demuestre:

a) $\forall\, x > 0\ \ln(x) < x$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ e^x > x$

c) La recta $x + y = 0$ y la curva $y = \ln(x)$ se cortan exactamente en un punto.

d) La recta $x + y = 0$ y la curva $y = e^x$ se cortan exactamente en un punto.

e) Si $h \in ]-1, 0[ \cup ]0, \infty[$, entonces $\dfrac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$

f) Si $0 < b \leq a$, entonces $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leq \dfrac{a-b}{b}$

g) Las funciones $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x) := \left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)$, $a$ fijo, tienen igual derivada.