Índice

1. Derivadas (pendientes desde Cálculo I) **2**
1.1. Concavidad y su caracterización por segunda derivada. 2
1.2. Inversas de funciones: continuidad y derivadas 2
1.3. Derivadas e inversas de funciones 3
1.4. Guía 1 4
1.5. Regla de L'Hôpital 6

2. Integral de Riemann **6**
2.1. Definiciones e integrabilidad 6
2.2. Guía 2 9
2.3. Integral de funciones continuas 10

3. TFC 1ª parte y Métodos de integración básicos **10**
3.1. Método de Sustitución 11
3.2. Método de integración por partes 12
3.3. Algunas integrales trigonométricas 12
3.4. Guía 3 13
3.5. Propiedades de la integral definida 15

4. TFC 2ª parte **15**
4.1. Guía 4 17

Bitácora 2010

Hasta aquí la clase del: **4 agosto** Presentación del curso. Repaso de continuidad y derivadas.

1. Derivadas (pendientes desde Cálculo I)

1.1. Concavidad y su caracterización por segunda derivada.

Definición 1. *Sea f una función definida en un intervalo I contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$.

1. *f es convexa en I ssi*

$$\forall x, y, z \in I \left(x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \right)$$

2. *f es cóncava en I ssi*

$$\forall x, y, z \in I \left(x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \right)$$

Teorema 1. *Sea f una función con segunda derivada en un intervalo I contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$. *Entonces:*

1. *f es convexa en I ssi $f^{''} \geq 0$ en I.*
2. *f es cóncava en I ssi $f^{''} \leq 0$ en I.*

Hasta aquí la clase del: **5 agosto** Concavidad y su caracterización por segunda derivada.

1.2. Inversas de funciones: continuidad y derivadas

Observaciones: Si $f : A \to B$ es una función real, es decir, donde $\{A, B\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, recordemos que:

1. Una restricción de f a un subconjunto C de A es la función $f \restriction C : C \to B$ que coincide con f en C.
2. La función $f \restriction C$ admite inversa $g : D \to C$ ssi $f \restriction C$ es inyectiva, donde D es la imagen de C por $f \restriction C$ (o por f, es el mismo conjunto imagen).
3. En tal caso, para simplifcar notación, basta indicar a g como $f^{-1} : f[C] \to C$, lo que viene a mencionarse como la "inversa de f en C".
4. Necesitamos recordar el TVI (Teorema del Valor Intermedio):

Si f continua en $[a, b]$, donde $a < b$ en $\mathbb{R}$, y λ es un real situado estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \lambda$

$\dashv$

Haremos unas caracterizaciones preliminares:

Lema 2 (Propiedad fundamental de intervalos)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces A es un intervalo ssi* $\forall\, a, b \in A\, \forall\, c \in \mathbb{R}\, \big(a < c < b \to c \in A\big)$

Lema 3 (Corolario a TVI)**.** *Sean f una función real e I un intervalo contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$. *Si f continua en I, entonces $f[I]$ es un intervalo.*

Hasta aquí la clase del: **10 agosto 08:30** Ejemplo de análisis de concavidad de una función. Inversas de continuas

Lema 4 (Una condición suficiente para continuidad)**.** *Sean g una función real y J un intervalo contenido en* $\mathrm{Dom}(g)$*. Si g es monótona estricta en J y $g[J]$ es un intervalo, entonces g es continua en J.*

Hasta aquí la clase del: **10 agosto 18:00** Control 0. Una condición suficiente para continuidad

Teorema 5 (Continuidad de la inversa)**.** *Sean f una función real e I un intervalo contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$*. Si f es continua e inyectiva en I, entonces f es monótona estricta en I, y tiene inversa $f^{-1} : f[I] \to I$ que es también monótona y continua en $f[I]$.*

1.3. Derivadas e inversas de funciones

Propiedad 6 (Condición necesaria para derivabilidad e la inversa)**.** *Sea f una función inyectiva y derivable en un intervalo I contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$*. **Si** $c \in I$ cumple que la inversa f^{-1} de f en I es derivable en $b := f(c)$, **entonces** $f^{'}(c) \neq 0$ y*

$$(f^{-1})^{'}(b) = \frac{1}{f'(c)}$$

Hasta aquí la clase del: **13 agosto** Continuidad de la función inversa. Condición necesaria para derivabilidad e la inversa

Teorema 7 (Condición suficiente para derivabilidad e la inversa)**.** *Sean f es una función inyectiva y derivable en un intervalo I contenido en* $\mathrm{Dom}(f)$*, y sea $J := f[I]$. **Si** $f^{'}(c) \neq 0$, **entonces** la inversa $f^{'}$ de f en I es derivable en $b := f(c)$ y*

$$(f^{-1})^{'}(b) = \frac{1}{f'(c)}$$

Hasta aquí la clase del: **17 agosto 08:30** Condición suficiente para derivabilidad e la inversa.

1.4. Guía 1

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Suponga que f y g son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

2. Si para una funci ón f definida en un intervalo $[a, b]$ existe $\alpha > 1$ tal que $\forall\, x, y \in [a, b]$ $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ entonces f es continua en $[a, b]$. Trabaje un poco más y demuestre que f es derivable en $]a, b[$, que su derivada es nula en $]a, b[$, y entonces f es constante en $[a, b]$.

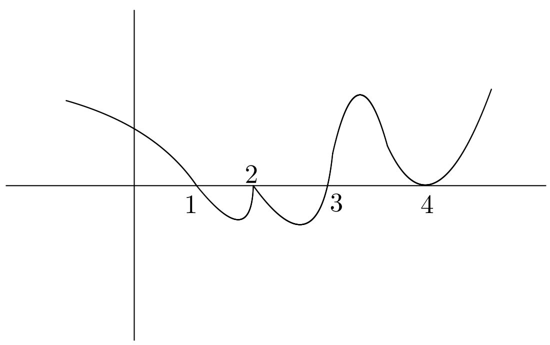
3. Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ es continua en su dominio y derivable en el interior de su dominio, y $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f'} = L \in \mathbb{R}$, entonces

   a) $\forall\, c > 0$ $\lim_{x \to +\infty} (f(x + c) - f(x)) = cL$

   b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$

4. Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

5. La figura muestra la gráfica de la <u>derivada</u> de f. Marque todos los puntos en que se asumen los máximos y mínimos locales de f, indicando si es máximo o si es mínimo local.



6. Analice completamente (incluyendo concavidad) cada una de las siguientes funciones. Además, encuentre el supremo y el ínfimo en los intervalos indicados (o demuestre que no existe).

   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $\mathbb{R}$.

   c) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[0, \infty)$.

   d) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

   e) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $[-1, 1/2]$.

   f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ en $[0, 5]$.

   g) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\mathbb{R}$.

   h) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $[-1/2, 1]$.

   i) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $[-1, 1/2]$.

   j) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $\mathbb{R}$.

7. Determine un intervalo en torno a $x = 4$ donde la función $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}(x - 5)^2}{4}$$

   tenga una función inversa (local) $f = g^{-1}$ y calcule la derivada $f'(\frac{1}{2})$.

8. Demuestre que:

a) $(\text{Arcsen}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

b) $(\text{Arccos}(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

c) $(\text{Arctan}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

d) $(\text{Arcsec}(x))' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

9. Demuestre que si f derivable en un intervalo I y para todo $x \in I$ se cumple $f'(x) < -4$, entonces f tiene inversa derivable en I.

10. Calcule los siguientes límites, usando la regla de l'Hôpital si se puede.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x^2)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x + x^3)}{x + \text{sen}(x^2)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}\big(x^2 + \text{sen}(x)\big)}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \tan(x)}{\text{sen}(x^2)}$

f) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x - \pi}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{\text{sen}^2(x)}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\text{sen}(x + \sqrt{x})}$

1.5. Regla de L'Hôpital

Teorema 8 (Teorema del Valor Medio generalizado)**.** *Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ (donde $a < b$ en $\mathbb{R}$) y derivables en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$

Teorema 9 (Regla de L'Hôpital)**.** *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo abierto I. Sea el símbolo $a \in (\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$ (simboliza un número o a uno de los símbolos de infinito) un punto de acumulación de I (si a simboliza un infinito, significa que I no es acotado en el sentido respectivo). Sea s uno de los símbolos a, a^+ o a^- (los dos últimos en caso de que $a \in \mathbb{R}$) Si se cumplen las condiciones siguientes:*

1. *f y g son derivables en $I - \{a\}$ y $\forall\, x \in I - \{a\}$ $g'(x) \neq 0$*
2. *Alguna de las tres condiciones siguientes se cumple:*

   a) $\displaystyle\lim_{x \to s} f(x) = 0 = \lim_{x \to s} g(x)$, *o bien* b) $\displaystyle\lim_{x \to s} g(x) = \infty$, *o bien* c) $\displaystyle\lim_{x \to s} g(x) = -\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe o es ∞ o es $-\infty$*

Entonces $\displaystyle\lim_{x \to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Integral de Riemann

Introducción a Integral de Riemann

Hasta aquí la clase del: **17 Agosto 18:00**

2.1. Definiciones e integrabilidad

Definición 2 (Partición de un intervalo cerrado)**.** *Sean a y b reales con $a < b$. Una partición del intervalo $[a, b]$ es una sucesión finita $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ tal que $n \in \mathbb{N}$ y*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Cada partición $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ determina n subintervalos de $[a, b]$ dados por

$$[a,\, x_1],\ [x_1,\, x_2],\ \cdots [x_{n-1},\, b]$$

Definición 3 (Sumas superior e inferior)**.** *Sea f una función acotada y sea $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ intervalo no vacío. Para cada partición $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ de $[a, b]$ se definen:*

1. *Suma superior de f para P, denotada $S(f, P)$, como $S(f, P) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta_i$ donde $M_i := \displaystyle\sup_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} (f)$ y $\Delta_i := x_i - x_{i-1}$.*
2. *Suma inferior de f para P, denotada $s(f, P)$, como $s(f, P) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta_i$ donde $m_i := \displaystyle\inf_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} (f)$ y $\Delta_i := x_i - x_{i-1}$.*

Hasta aquí la clase del: **20 Agosto**

Notamos que cada partición de un intervalo $[a,b]$ queda unívocamente determinada por su recorrido, es decir, por un subconjunto finito de $[a,b]$, debido a que la sucesión finita debe ser creciente estricta. Ello permite considerar cada partición de $[a,b]$ como un subconjunto finito de $[a,b]$ que incluye a los valores a y b.

Definición 4. *Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$. Se definen:*

1. *El conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ como $\mathbb{P}[a,b] = \{P : P$ es partición de $[a,b]\}$*
2. *El conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ en n subintervalos, donde $n \in \mathbb{N}$, como $\mathbb{P}_n[a,b] = \{\{x_i\}_{i=0}^n : \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{P}[a,b]\}$*
3. *Un refinamiento de una partición $P \in \mathbb{P}[a,b]$ es una partición $Q \in \mathbb{P}[a,b]$ tal que $P \subseteq Q$. También se dice que Q es más fina que P y también que P es más gruesa que Q.*

Notar que si P y Q son particiones de $[a,b]$, entonces $P \cup Q$ es una partición y es más fina que P y que Q.

Definición 5. *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Se definen:*

1. *La función suma superior, que a cada partición de $[a,b]$ asigna la respectiva suma superior.*
2. *La función suma inferior, que a cada partición de $[a,b]$ asigna la respectiva suma inferior.*

Hasta aquí la clase del: **24 agosto 08:30**

Propiedad 10. *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Si P y Q son particiones de $[a,b]$ y Q es un refinamiento de P, entonces*

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

Definición 6. *Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$. Una partición regular de $[a,b]$ es una en que todos los subintervalos tienen igual ancho.*

Propiedad 11. *Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces*

1. *En una partción regular de $[a,b]$ en n subintervalos, cada subintervalo tiene ancho $\frac{b-a}{n}$*
2. *Una partición de $[a,b]$ es regular ssi sus puntos forman una Progresión Aritmética.*

Propiedad 12. *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Entonces toda suma superior de f en $[a,b]$ es mayor o igual a toda suma inferior de f en $[a,b]$.*

Definición 7 (Integral superior, integral inferior)**.** *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Se definen:*

1. *Integral superior de f en $[a,b]$, denotada $U(f,[a,b])$, como $U(f,[a,b]) := \inf\{S(f,P) \ : \ P \in \mathbb{P}[a,b]\}$*
2. *Integral inferior de f en $[a,b]$, denotada $L(f,[a,b])$, como $L(f,[a,b]) := \sup\{S(f,P) \ : \ P \in \mathbb{P}[a,b]\}$*

Propiedad 13. *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Entonces $L(f,[a,b]) \leq U(f,[a,b])$*

Definición 8 (Función integrable según Darboux)**.** *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a<b$ y $[a,b]\subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Se dice que f es integrable en $[a,b]$ ssi $L(f,[a,b])=U(f,[a,b])$.*

En tal caso, al número expresado por ambas integrales superior e inferior se le llama la integral de f en $[a,b]$ y se denota

$$\int_a^b f(x)dx$$

Observaciones: La variable que aparece en $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ carece por ahora de importancia, pudiendo denotarse la integral como $\displaystyle\int_a^b f$, pero veremos más adelante que conviene utilizar tal variable, con miras a ciertas propiedades y operaciones de integrales. $\dashv$

Hasta aquí la clase del: **24 agosto 18:00**

2.2. Guía 2

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Considere

   a) $P_1 = \{0, 1, 1{,}5, 2, 3, 3{,}3\}$ b) $P_2 = \{-2, -0{,}5, 1, 3, 4\}$ c) $P_3 = \{-\sqrt{2}, \pi/4, 1, \sqrt{3}\}$

   P_1, P_2 y P_3 son particiones de ciertos intervalos. Para cada una de ellas:

   a) Determine el intervalo del que es partición.
   b) Decida si la partición es o no regular.
   c) Encuentre la norma $||P||$ de la partición (el mayor ancho de entre los subintervalos determinados por P).
   d) Exprese y calcule las sumas superiores e inferiores para la función $f(x) = x^2$.
   e) Encuentre refinamientos de estas particiones que tengan norma 0,5.

2. Demuestre que si f es una función acotada en un intervalo $[a, b]$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la partición regular P_n de $[a, b]$, entonces $U(f, [a, b]) = \text{ínf}\{S(f, P_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y $L(f, [a, b]) = \sup\{s(f, P_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

3. Calcule las sumas superiores e inferiores para la función f en el intervalo indicado usando una partición regular en 4 subintervalos.

   a) $f(x) = 2x + 3,\ [1, 5]$ b) $f(x) = \sqrt{x},\ [0, 3]$ c) $f(x) = x^3 - 3x,\ [-2, 2]$

4. Determine si es o no integrable en el intervalo $[1, 5]$, y cuanto vale la integral, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\forall\, x \in \mathbb{R}\, f(x) = 3$.

5. Demuestre que toda función constante en un intervalo es integrable en él y exprese su integral en términos del valor constante de la función y de los extremos del intervalo.

6. Asuma que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\forall\, x \in \mathbb{R}\, f(x) = x + 3$ es integrable en $[1, 4]$. Calcule sus sumas parciales y con ellas calcule la integral. Puede ser útil considerar el ejercicio 2

7. Asumiendo que f y g son funciones integrables en un intervalo $[a, b]$, demuestre que la función $f + g$ es integrable en $[a, b]$. Para ello, exprese las sumas superiores e inferiores en términos de las sumas superiores e inferiores de f y de g, y analice el comportamiento de los supremos e ínfimnos involucrados.

No toda función es integrable. Por ejemplo, si $f : [0,1] \in \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$, entonces toda suma superior vale 1 y toda suma inferior vale -1, y por tanto la integral superior vale 1 y a integral inferior vale -1; al ser distintas, la función no es integrable.

Propiedad 14 (Condición para integrabilidad)**.** *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ ssi*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P \in \mathcal{P}[a,b] \left(S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \right)$$

Definición 9. *Sean $[a,b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a,b]$. La norma de la partición P es el valor máximo del conjunto finito $\{\Delta_i \, : \, 1 \leq i \leq n\}$*

Propiedad 15 (Monótonas son integrables)**.** *Sea f una función acotada en un intervalo $[a,b]$ tal que $a < b$ y $[a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Si f es monótona en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$*

Hasta aquí la clase del: **31 agosto 08:30**

2.3. Integral de funciones continuas

Definición 10 (Continuidad uniforme)**.** *Una función f definida en un conjunto A es uniformemente continua en A ssi*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in A \left(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \right)$$

No toda función continua es uniformemente continua. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$ y cualquier $\delta > 0$, sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\delta}$ (existe por Prop. Arquimediana) y sean $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$ valores del dominio de f. Entonces $|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$ pero $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n > \frac{1}{2} = \epsilon$.

Propiedad 16. *Toda función uniformemente continua en un conjunto es también continua en el conjunto*

Propiedad 17. *Toda función continua en un intervalo cerrado es uniformente continua en el intervalo.*

Teorema 18 (Integrabilidad de las funciones continuas)**.** *Toda función continua en un intervalo $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.*

Hasta aquí la clase del: **31 agosto 18:00**

3. TFC 1ª parte y Métodos de integración básicos

Teorema 19 (Teorema fundamental del Cálculo, primera parte)**.** *Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y sea g una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y tal que $g' = f$ en $]a,b[$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

El resultado anterior es más sugerente escrito como

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Para calcular integrales de funciones integrables, puede entonces ayudar el conocer de qué función es derivada.

Note que el resultado no depende de cual función g se considere.

Diremos que g es una primitiva de f en un intervalo si $g' = f$ en ese intervalo.

Lema 20. *Si g_1 y g_2 son primitivas de f en algún intervalo, entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $g_1 = g_2 + C$ en el intervalo.*

Definimos la integral indefinida de una función f en un intervalo como el conjunto de las primitivas de f en ese intervalo, y se denota $\displaystyle\int f(x)\,dx$

El lema indica que si g es una primitiva de f, entonces $\displaystyle\int f(x)\,dx = \{g + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}$. Se abrevia

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

La constante C se llama constante de integración.

Para encontrar primitivas de funciones estudiamos "Métodos de integración" de los cuales el más sencillo es el método directo o básico: conocida la derivada f de una función F, tenemos $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Por ejemplo, se tiene

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C \qquad \int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \qquad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int dx = x + C \qquad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Q} - \{-1\} \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$$

Lema 21 (Linealidad de la integral indefinida)**.** *Si F es primitiva de f en un intervalo, y G es primitiva de g en el mismo intervalo, y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un constante, entonces*

$$\int (f(x) + \alpha g(x))\,dx = F(x) + \alpha G(x) + C$$

Note que basta con indicar una cosntante de intergación, es decir, no es necesario combinar explícitamente las constantes de integración, ya que la combinación de constantes es constante, y como el recorrido de una función afín en $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$, toda constante se escribe como combinación de constantes.

Utilizaremos la notación diferencial para los siguientes métodos de integración:

- Si x es una variable, su diferencial es dx y no es un número.
- Si $y = f(x)$, las diferenciales se relacionan por $dy = f'(x)\,dx$

3.1. Método de Sustitución

El Método de Sustitución es el análogo de la Regla de la Cadena para derivadas, y se expresa del siguiente modo: Si F es una primitiva de f en algún intervalo, y g es una función derivable, entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

La forma de utilizar el método de sustitución es el siguiente: dada $\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$ y $F' = f$, sea y una variable auxiliar dada por $y = g(x)$. Entonces $dy = g'(x)\,dx$ y se cumple:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) + C = F(g(x)) + C$$

Aún no trabajamos logaritmo ni exponencial.

Hasta aquí la clase del: **21 septiembre 08:30**

3.2. Método de integración por partes

Si u y v son funciones de x, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

El método de integración por partes se utiliza, en general, para reducir el cálculo de una primitiva al cálculo de una primitiva más simple.

3.3. Algunas integrales trigonométricas

Se trata de algunos casos de integrales de las siguientes formas:

1. Para algunos $n, m \in \mathbb{Q}$, integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx$, $\int \cos^n(x)\,dx$, $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)\,dx$
2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, integrales de la forma $\int \cos(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx$

Aún no trabajamos logaritmo ni exponencial.

Hasta aquí la clase del: **21 septiembre 18:00**

3.4. Guía 3

Cálculo II Cs. Exactas 2010

Integrales indefinidas: sustitución

Calcule:

1. $\int (3x+1)^4 dx$
2. $\int x(2x^2-3)^3 dx$
3. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+1} dx$
4. $\int t^2\sqrt{t^3-1}dt$
5. $\int \sqrt{9-x^2}xdx$
6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$
7. $\int \dfrac{x-2}{(x^2-4x+3)^3} dx$
8. $\int \dfrac{x^2+x}{(4-3x^2-2x^3)^4} dx$
9. $\int \dfrac{sds}{\sqrt[3]{1-2s^2}} ds$
10. $\int \sqrt[5]{t^4-t^2}(10t^3-5t)dt$
11. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^6-4}}$
12. $\int \dfrac{(\sqrt{u}+3)^4}{\sqrt{u}} du$
13. $\int (1+\frac{1}{u})^{-3}\frac{1}{u^2}du$
14. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$
15. $\int 5\sqrt{8x+5}dx$
16. $\int \dfrac{\cos(x)dx}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2(x)}}$
17. $\int \tan^3(x)\sec^2(x)dx$
18. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}$
19. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}}$
20. $\int \dfrac{\operatorname{Arcsen}(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\int x\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)dx$
22. $\int \dfrac{\operatorname{Arcsec}(x)dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
23. $\int \dfrac{x\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+4})dx}{\sqrt{x^2+4}}$
24. $\int \dfrac{x\cos(\sqrt[3]{x^2+3})dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$
25. $\int x^2(x^3+5)^8\cos(\,(x^3+5)^9\,)dx$
26. $\int x^6(7x^7+\pi)^8\operatorname{sen}(\,(7x^7+\pi)^9\,)dx$
27. $\int x\cos(x^2+4)\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+4)}dx$
28. $\int x^6\operatorname{sen}(3x^7+9)\sqrt[3]{\cos(3x^7+9)}dx$
29. $\int \dfrac{\sqrt[5]{\tan(x^{-3}+1)}dx}{x^4\cos^2(x^{-3}+1)}$

Integrales indefinidas: por partes

Calcule:

1. $\int (3x^3+1)\cos(2x)dx$
2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$
3. $\int \operatorname{Arcsen}(x)dx$
4. $\int x\sqrt{x+1}dx$
5. $\int x\sqrt[3]{2x+7}dx$
6. $\int x^5\sqrt{x^3+4}dx$
7. $\int x^{13}\sqrt{x^7+1}dx$
8. $\int \dfrac{x^7}{(7-3x^4)^{3/2}}dx$
9. $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$
10. $\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(3x)dx$
11. $\int \cos(5x)\operatorname{sen}(7x)dx$

Integrales indefinidas: integrales trigonométricas

Calcule:

1. $\int \operatorname{sen}^4(x)dx$
2. $\int \cos^6(x)dx$
3. $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^{-6}(x)dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)dx$
6. $\int \operatorname{sen}(2x)\cos(3x)dx$

   `(sugerencia: use prostaféresis)`
7. $\int \cot^4(x)dx$
8. $\int \tan^{-3/2}(x)\sec^4(x)dx$
9. $\int \tan^3(x)\sec^{-1/2}(x)dx$

Problemas varios

1. Verifique derivando las siguientes fórmulas

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}+C$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

   c) $\displaystyle\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$

2. Evalúe las siguientes antiderivadas por los conocimientos que tiene de derivadas

   a) $\displaystyle\int (4x^2-8x+1)dx$

   b) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{z^7}-\frac{7}{z^4}+z\right)dz$

   c) $\displaystyle\int (3x-1)^2 dx$

   d) $\displaystyle\int -\frac{1}{5}\sin x dx$

   e) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{u}-\frac{1}{2}u^{-2}+5\right)du$

   f) $\displaystyle\int \frac{8x-5}{\sqrt[3]{x}}dx$

3. Evalúe las siguientes integrales o explique por qué no existen:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^5 dx$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{x}dx$

   c) $\displaystyle\int_{3}^{3} \sqrt{x^5+2}dx$

   d) $\displaystyle\int_{-4}^{2} \frac{2}{x^6}dx$

   e) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{6}{1+x^2}dx$

   f) $\displaystyle\int_{1}^{3} (x+\sqrt[3]{x})dx$

   g) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2-1|dx$

   h) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^2 t dt$

   i) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-x^2|dx$

4. Explique el error en el siguiente uso del teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}dx = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

3.5. Propiedades de la integral definida

Teorema 22. *Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ con $a<b$. Entonces*

1. *La función $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y* $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. *Para cada constante $\alpha \in \mathbb{R}$ la función αf es integrable y* $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$
3. *Si $f \le g$ en $[a,b]$, entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
4. *Para cada $c \in]a,b[$ la función f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Hasta aquí la clase del: **28 septiembre 08:30**

Teorema 23. *Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ con $a<b$. Entonces*

1. *El producto fg es integrable en $[a,b]$ (pero su integral no es el producto de las integrales, en general)*
2. *Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in [a,b]\; 0 < k \le |g(x)|$, entonces el cociente $\frac{f}{g}$ es integrable en $[a,b]$ (pero su integral no es el cociente de las integrales, en general)*
3. *$|f|$ es integrable en $[a,b]$ y* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Teorema 24. *Si f y g son idénticas en $]a,b[$ y ambas son acotadas en $[a,b]$, entonces:*

1. *f es integrable en $[a,b]$ ssi g es integrable en $[a,b]$*
2. *En tal caso,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Hasta aquí la clase del: **28 septiembre 18:00**

Cálculo de áreas de regiones planas.

Hasta aquí la clase del: **1º octubre**

Trabajo medido por integrales.

4. TFC 2ª parte

Se define el valor promedio $\overline{f}$ de una función integrable f en un intervalo $[a,b]$ como

$$\overline{f} := \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Si f es continua en $[a,b]$, entonces por TVI existe $c \in]a,b[$ tal que el valor promedio de f en $[a,b]$ es $f(c)$, es decir,

$$f \text{ continua en } [a,b] \quad \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Teorema 25 (TFC 2^{a} parte)**.** *Si f continua en $[a,b]$, y $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es la función definida por $\forall\, x\in[a,b]\; F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Entonces F es derivable en cada punto $x_0\in[a,b]$ y se cumple:*

$$F'(x_0) = f(x)$$

Se escribe el teorema anterior de modo más sugerente como: Si f continua en $[a,b]$, entonces para todo $x\in[a,b]$ se cumple $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

Note que TFC 2^{a} parte implica que toda función continua en $[a,b]$ tiene una primitiva dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, pero hay funciones cuya primitiva no es expresable algebraicamente, como $\int cos(x^2)\,dx$

Hasta aquí la clase del: **5 octubre 08:30**

Si $a<b$, por acuerdo definimos $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$. Compare con TFC 1^{a} parte.

Definimos también por acuerdo $\int_a^a f(x)\,dx := 0$. Compare con TFC 1^{a} parte.

Teorema 26 (Cambio de variable en integrales definidas (sustitución))**.** *Si f es continua en un intervalo abierto I, g tiene derivada continua en $[a,b]$, y $g\big[[a,b]\big]\subseteq I$, entonces*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

donde $t = g(x)$

Hasta aquí la clase del: **5 octubre 18:00**

4.1. Guía 4

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Exprese las siguientes como una integral

   a) $\displaystyle\int_5^1 f(x)dx + \int_{-3}^5 f(x)dx$

   b) $\displaystyle\int_4^1 f(x)dx + \int_6^4 f(x)dx$

   c) $\displaystyle\int_c^d f(x)dx + \int_e^c f(x)dx$

   d) $\displaystyle\int_{-2}^6 g(x)dx - \int_{-2}^2 g(x)dx$

   e) $\displaystyle\int_c^{c+h} g(x)dx - \int_c^h g(x)dx$

2. Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$. Si c y e son números reales, demuestre que

$$\int_a^b [cf(x)+eg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + e\int_a^b g(x)dx.$$

3. Si f es continua en $[a,b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Decida cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre [0,2] y calcule la integral cuando sea posible.

   a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x-2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

   c) $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x, el mayor entero menor o igual a x)

   d) $f(x) = \begin{cases} x + \lfloor x \rfloor, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

5. Demostrar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \ge 0$

6. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

7. Demostrar que

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$$

8. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$$

9. Determine el área de las regiones planas indicadas mediante integrales:

   a) Región encerrada por $y = x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$

   b) Región encerrada por $y = x^3 - x + 2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$

c) Región encerrada por $y = x^2 + 2x - 3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 1$

d) Región encerrada por $y = x^3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 3$

e) Región encerrada por $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

f) Región encerrada por $y = (x-3)(x-1)$, $y = x$

g) Región encerrada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 4$, $x = 0$

h) Región encerrada por $y = x^2 - 2x$, $y = -x$

i) Región encerrada por $x = 8y - y^2$, $x = 0$

j) Región encerrada por $x = -6y^2 + 4y$, $x + 3y - 2 = 0$

k) Región encerrada por $4y^2 - 2x = 0$, $4y^2 + 4x - 12 = 0$

l) Región encerrada por $x = 4y^4$, $x = 8 - 4y^2$

m) Región encerrada por $y = x + 6$, $y = x^3$, $2y + x = 0$

n) Región interior del triángulo de vértices $(-1, 4)$, $(2, -2)$ y $(5, 1)$

10. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+2t}\,dt$

b) $f(y) = \displaystyle\int_2^y t^2 \sin t\, dt$

c) $h(x) = \displaystyle\int_x^{-3} \cos(y^2)\,dy$

d) $f(x) = \displaystyle\int_2^{1/x} \arctan u\, du$

e) $g(x) = \displaystyle\int_{1-3x}^{\cos x} \cos(t^3)\,dt$

f) $g(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} (\pi - \sqrt{x^2-1})\,dx$

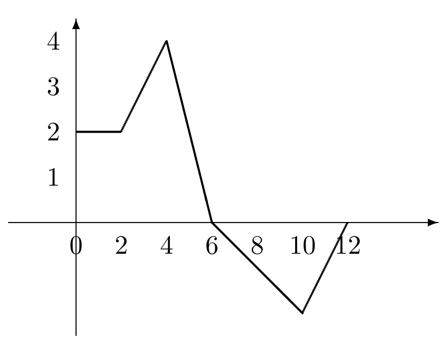
11. Sea $g(x) = \int_3^x f(t)dt$, donde f es la función cuyo gráfico se muestra

a) Evalúe $g(0), g(2), g(3), g(8), g(12)$

b) Determine en qué intervalo es creciente la función g

c) ¿Dónde alcanza g su valor máximo?

d) Haga un esbozo del gráfico de g.



12. Encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado, determine un punto c en el intervalo que cumpla que $f(c)$ es el valor medio.

a) $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$

b) $f(x) = 1/x$, $[1, 4]$

c) $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

d) $f(x) = x^3 - x + 1$, $[0, 2]$