4.1. Guía 4

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Exprese las siguientes como una integral

   a) $\displaystyle\int_5^1 f(x)dx + \int_{-3}^5 f(x)dx$
   b) $\displaystyle\int_4^1 f(x)dx + \int_6^4 f(x)dx$
   c) $\displaystyle\int_c^d f(x)dx + \int_e^c f(x)dx$
   d) $\displaystyle\int_{-2}^6 g(x)dx - \int_{-2}^2 g(x)dx$
   e) $\displaystyle\int_c^{c+h} g(x)dx - \int_c^h g(x)dx$

2. Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$. Si c y e son números reales, demuestre que

$$\int_a^b [cf(x)+eg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + e\int_a^b g(x)dx.$$

3. Si f es continua en $[a,b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Decida cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre [0,2] y calcule la integral cuando sea posible.

   a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
   c) $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x, el mayor entero menor o igual a x)
   d) $f(x) = \begin{cases} x + \lfloor x \rfloor, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

5. Demostrar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$

6. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

7. Demostrar que

$$\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$$

8. Demostrar que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$$

9. Determine el área de las regiones planas indicadas mediante integrales:

   a) Región encerrada por $y = x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$
   b) Región encerrada por $y = x^3 - x + 2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$

c) Región encerrada por $y = x^2 + 2x - 3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 1$

d) Región encerrada por $y = x^3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 3$

e) Región encerrada por $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

f) Región encerrada por $y = (x-3)(x-1)$, $y = x$

g) Región encerrada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 4$, $x = 0$

h) Región encerrada por $y = x^2 - 2x$, $y = -x$

i) Región encerrada por $x = 8y - y^2$, $x = 0$

j) Región encerrada por $x = -6y^2 + 4y$, $x + 3y - 2 = 0$

k) Región encerrada por $4y^2 - 2x = 0$, $4y^2 + 4x - 12 = 0$

l) Región encerrada por $x = 4y^4$, $x = 8 - 4y^2$

m) Región encerrada por $y = x + 6$, $y = x^3$, $2y + x = 0$

n) Región interior del triángulo de vértices $(-1, 4)$, $(2, -2)$ y $(5, 1)$

10. Use el teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}dt$

b) $f(y) = \int_2^y t^2 \sin t\, dt$

c) $h(x) = \int_x^{-3} \cos(y^2)dy$

d) $f(x) = \int_2^{1/x} \arctan u\, du$

e) $g(x) = \int_{1-3x}^{\cos x} \cos(t^3)dt$

f) $g(y) = \int_y^{y^2} (\pi - \sqrt{x^2 - 1})dx$

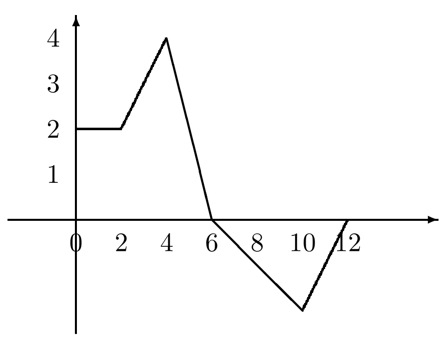
11. Sea $g(x) = \int_3^x f(t)dt$, donde f es la función cuyo gráfico se muestra

a) Evalúe $g(0), g(2), g(3), g(8), g(12)$

b) Determine en qué intervalo es creciente la función g

c) ¿Dónde alcanza g su valor máximo?

d) Haga un esbozo del gráfico de g.



12. Encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado, determine un punto c en el intervalo que cumpla que $f(c)$ es el valor medio.

a) $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$

b) $f(x) = 1/x$, $[1, 4]$

c) $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

d) $f(x) = x^3 - x + 1$, $[0, 2]$