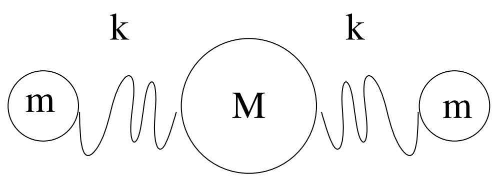
Tarea 3
Mecánica analítica

Ejercicio 1: Vibración de una molécula triatomica linear

Considere el siguiente modelo

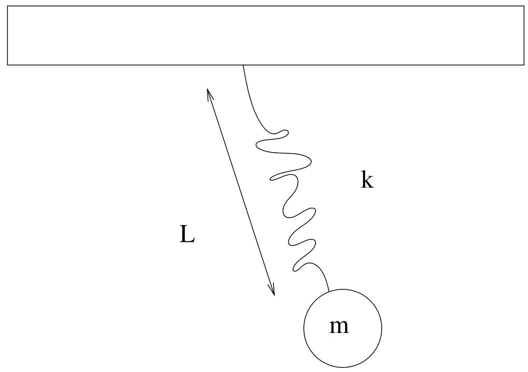


Modelo molécula

a)Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema (use variables generalizadas).
b)Encuentre las frecuencias de oscilación propias correspondientes a los modos propios del sistema.
c)Existe un modo llamado "soft", donde $\omega = 0$. Para este modo particular, como quedan las ecuaciones de movimiento? Que magnitud se conserva en este modo? Esto es una consecuencia de la invarianza del Lagrangiano bajo translaciones espaciales continuas.Cuál es la solución para las ecuaciones de movimiento en este modo? Que tipo de movimiento tendra el sistema entonces?
d)De una interpretación conceptual de los otros modos.
e)Cuál es la solución más general para el problema, en término de los modos?

Ejercicio 2
Desarrolle y obtenga los resultados de la sección 1.4.2 y 1.4.3 del capítulo 2 de los apuntes del profesor.

Ejercicio 3
Consideremos la siguiente situación:



Un péndulo de locos.

Encuentre el Lagrangiano. Determine las ecuaciones de movimiento y grafique las trayectorias (más que nada para asegurarse que ha hecho algo correcto!).Cuales son los modos normales del sistema?Cuales son los puntos de equilibrio? Se puede determinar la estabilidad de estos puntos bajo los métodos del ejercicio 2 de esta misma tarea?

Ejercicio 4 Considere el efecto de la rotación terrestre sobre el movimiento de un proyectil que se lanza desde la superficie terrestre con velocidad $\vec{v}_0$. Suponga que el alcance del proyectil es tal que en todo instante se mueve en un campo gravitacional constante, o sea, $\vec{F}_g = m\vec{g}$:
a)Demuestre que la velocidad del proyectil viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Todas las magnitudes están medidas respecto a un observador solidario con la tierra. Acá $\vec{r}$ es el vector posición del proyectil medido desde el punto de lanzamiento y $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad angular de la tierra. Al resolver este problema no se debe incluir la fuerza centrífuga ya que ésta incluida en el valor local de $\vec{g}$ que se esta usando.
b) Demuestre que, al despreciar términos del orden Ω^2, la aceleración satisface

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0$$

(Nuevamente todas las magnitudes medidas desde un sistema de referencia solidario a la tierra). Integre lo último y demuestre que

$$\vec{r}(r) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \frac{1}{3}\vec{\Omega} \times \vec{g}t^3 - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 t^2$$

Ejercicio 5 (Dieciochero!): Desde un edificio de altura $h = 100$ situado en el Ecuador terrestre, se suelta una piedra. Debido a la rotación terrestre, la piedra no caerá a lo largo de la normal sino que se desviará levemente de ella. Una vez que llegue al suelo, encuentre la magnitud y dirección de la desviación. Desprecie efectos debido al roce viscoso con el aire.
Hint:Use el resultado obtenido en el problema anterior.
Respuesta: La desviación es hacia el este y es de magnitud

$$\frac{2}{3}\Omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2,19cm$$