

Capítulo 2: Dinámica

Partiremos con el comentario que si definimos el siguiente funcional, que de ahora en adelante llamaremos Lagrangiano,

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$$

asumiendo coordenadas cartesianas inerciales, y aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

las ecuaciones de Newton. Resolver las ecuaciones de Newton en la mayoría de los casos resulta extremadamente tedioso, como lo son para situaciones en que el movimiento tiene varias restricciones ya que esto implica resolver las fuerzas de restricción. El mejor ejemplo es el movimiento de un cuerpo bajo la fuerza de gravedad restringida en una superficie dada. Pero es relevante darse cuenta que estas fuerzas de restricción, aunque muy complicadas, no hacen trabajo. La solución a este problema es reformulando la mecánica clásica en termino de optimización del Lagrangiano. Como vimos en el capítulo anterior, al pasar del set de coordenadas con restricciones a un set de variables generalizadas, generamos el numero correcto de variables independientes que rigen la dinámica donde las fuerzas de restricción ya no aparecen.

Veremos a continuación como dos lenguajes aparentemente muy diferentes, uno basado en fuerzas y otro basado en la optimización del Lagrangiano, dan origen a las mismas ecuaciones de movimiento. Aunque estos dos lenguajes se relacionan matemáticamente, es una incógnita para el autor como estas dos representaciones de la naturaleza, o lenguajes, permiten la misma física.

Índice

1. Formalismo 1: Ecuaciones de Newton	3
1.1. Fuerzas Conservativas	3
1.2. Grupo de partículas	5
1.2.1. Centro de Masa: momento 0 en velocidad	5
1.2.2. Energía: momento 1 en velocidad	6
1.2.3. Momento angular: momento 1 en velocidad y 1 en posición	7
1.3. Espacio de Fase	7
1.4. Ejemplo: El péndulo	8
1.4.1. Solución cercana a los puntos de equilibrio: método directo	9
1.4.2. Solución cercana a los puntos de equilibrio: modos normales primer orden	10
1.4.3. Solución cercana a los puntos de equilibrio: modos normales segundo orden	11
1.4.4. Solución utilizando el principio de conservación de la energía:	13
1.4.5. El péndulo con fricción:	14
2. Soluciones numéricas	14
2.0.6. Ejemplo: El péndulo forzado	14
2.1. Sistemas inerciales	16
2.1.1. Aceleración lineal	17
2.1.2. Rotación	17
3. Formalismo 2: Principio de Hámilton	21
3.1. Variables generalizadas y restricciones	22
3.2. De Newton a Hámilton	26
3.2.1. Fuerzas conservativas o derivables de un potencial	28
3.2.2. Fuerzas dependientes de velocidades	33
3.3. Fuerzas generalizadas en el principio de Hámilton	33
3.3.1. Fuerzas generalizadas	36
4. El Hamiltoniano y el Momento Canónico	37
4.1. Conservación de energía	39
4.1.1. Transformación a variables generalizadas	39
5. Pequeñas oscilaciones	41
6. Paso al continuo	46
6.1. Solución numérica de la Ecuación de Ondas	48
6.2. Solución numérica de la propagación de Frentes	49

1. Formalismo 1: Ecuaciones de Newton

El formalismo de Newton esta basado en el concepto de las fuerzas. Un cuerpo se mueve bajo la fuerza \mathbf{F} total en una trayectoria

$$\frac{d m \dot{\mathbf{r}}}{dt} = F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

Para el caso no-relativista tenemos que $\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}$. Es importante darse cuenta que esta relación se satisface en sistemas de **coordenadas inerciales**. Un sistema de coordenadas inercial es aquel en el cual un cuerpo se mueve con la relación $\dot{\mathbf{p}} = 0$ si no fuerzas se aplican sobre el. Es fácil probar que si un sistema de coordenadas se mueve con velocidad constante relativo a un sistema de coordenadas inercial, entonces este sistema también es inercial. La primera ley de Newton define el concepto de sistemas de coordenadas inerciales y la segunda ley de Newton relaciona las fuerzas con la dinámica. La tercera ley de Newton especifica que las acciones entre dos cuerpos son siempre iguales y opuestas en la misma línea recta.

1.1. Fuerzas Conservativas

Por lo general una fuerza se puede derivar de un potencial si

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \sum_i \frac{dU}{dx_i} \dot{x}_i + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t}$$

denominaremos una fuerza como conservativa si

1. No puede tener dependencia explicita del tiempo
2. Depende solo de las posiciones de las partículas
3. Se puede escribir como la gradiente de un potencial

$$F_i^C = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

y por lo tanto

$$\frac{dU}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U$$

Estas restricciones se pueden relajar un poco. La razón de ser de esta definición, es que así podemos construir un **principio de conservación de la energía**. Multiplicando la ley de Newton por $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \left[\frac{d m \dot{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^{NC} \right]$$

y usando esta relación para las fuerzas conservativas

$$\begin{aligned}\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U = -\mathbf{F}^C \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d m \dot{\mathbf{r}}}{dt}\end{aligned}$$

llegamos al siguiente teorema de conservación de energía,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}) \right) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}^{NC} \quad \rightarrow \quad \Delta \left(\frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}) \right) = \int_S \mathbf{F}^{NC} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

El trabajo hecho por las fuerzas no conservativas cambia la energía del sistema. Notemos que es fundamental que U solo dependa de las posiciones y no del tiempo ni de las velocidades. Mas adelante relajaremos esto.

En cursos básicos se demuestra que nuestra definición es equivalente a que

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_o) = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

sea independiente del tiempo y de todos los posibles caminos C que se tomen entre los puntos \mathbf{r} y \mathbf{r}_o . Esto implica que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

para todos los posibles caminos cerrados. Así, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, lo que es una condición suficiente y necesaria si el dominio de la fuerza no tienen huecos (singly connected) y **no depende del tiempo**. Y esto implica entonces que \mathbf{F} se puede escribir como la gradiente de un potencial

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

Notemos que si construimos un potencial $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ de una fuerza

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

que depende explícitamente del tiempo o las velocidades, nos queda que el principio de conservación de energía sería

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}^{NC} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i$$

pero ya no tiene sentido hablar de integrales de camino.

1.2. Grupo de partículas

Consideremos un grupo $i = 1, \dots, n$ de partículas

$$\frac{dm_i \dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{j,i} + \mathbf{F}_i$$

donde las fuerzas $\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i)$ son ejercidas por la partícula j sobre la partícula i , y $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i)$ es la fuerza externa sobre la partícula i . En general vamos a estar interesados en fuerzas centrales en que $r_{i,j} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, donde

$$\mathbf{F}_{j,i} = K(r_{i,j}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|r_{i,j}|}$$

las cuales representan las principales fuerzas en las cuales estamos interesados, como la fuerza de gravedad $K(r) = Gm_i m_j / r^2$ o la fuerza eléctrica $K(r) = -k_o q_1 q_2 / r^2$. Estas fuerzas son conservativas y el potencial se puede escribir como

$$U(r) = - \int K(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_{\infty}^r K(r) dr$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{j,i} &= -U'(r_{i,j}) \nabla_{\mathbf{r}_i} r_{i,j} = K(r_{i,j}) \hat{\mathbf{r}}_{i,j} \\ \mathbf{F}_{i,j} &= -U'(r_{i,j}) \nabla_{\mathbf{r}_j} r_{i,j} = K(r_{i,j}) \hat{\mathbf{r}}_{j,i} \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{F}_{j,i} = -\mathbf{F}_{i,j}$$

ya que $\hat{\mathbf{r}}_{i,j} = -\hat{\mathbf{r}}_{j,i}$. En los próximos argumentos usaremos esta tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$ en que la acción es igual a la reacción. Este claramente se satisface en las fuerzas centrales.

Si queremos escribir la evolución de un sistema tenemos que describir la evolución de cada una de sus partículas. En muchas instancias estamos solo interesados en la evolución macroscópica del sistema. En muchas situaciones es posible describir la evolución de las variables macroscópicas tomando momentos (multiplicar por una combinación de coordenadas del espacio de fase y luego sumar sobre todas las partículas) de la ecuación de movimiento. En el paso al continuo esto es

$$M_{n,m} = \int v^n x^m f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) d\mathbf{v}$$

1.2.1. Centro de Masa: momento 0 en velocidad

Sumemos la ecuación de movimiento sobre todas las partículas,

$$\sum_i \frac{dm_i \dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{j,i} + \sum_i \mathbf{F}_i$$

lo que nos permite definir la variable macroscópica de centro de masa

$$\mathbf{P}_{CM} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad \rightarrow \quad M \mathbf{R}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

y su evolución como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}_{CM} &= \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{j,i} = \sum_i \mathbf{F}_i + \left(\sum_{i>j} \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{i<j} \mathbf{F}_{j,i} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i + \left(\sum_{i>j} \mathbf{F}_{j,i} - \sum_{i<j} \mathbf{F}_{i,j} \right) \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i + \left(\sum_{i>j} \mathbf{F}_{j,i} - \sum_{j<i} \mathbf{F}_{j,i} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i + \left(\sum_{i>j} (\mathbf{F}_{j,i} - \mathbf{F}_{j,i}) \right) = \sum_i \mathbf{F}_i\end{aligned}$$

por lo tanto no importa como las partículas están moviéndose entre sí, el centro de masa se mueve solo con relación a las fuerzas externas. Si no hay fuerzas externas, entonces el centro de masa se mueve con momento o velocidad constante.

1.2.2. Energía: momento 1 en velocidad

Multipliquemos la ecuación de Newton por la velocidad dx_i/dt . Con lo cual tenemos que

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{dm_i \dot{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) = \sum_{j \neq i} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i$$

si además exigimos que las fuerzas entre las partículas son conservativas, tenemos que el potencial entre partículas depende de dos variables, por lo tanto

$$\frac{dU(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i)}{dt} = \nabla_{\mathbf{r}_i} U \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \nabla_{\mathbf{r}_j} U \cdot \dot{\mathbf{r}}_j = -\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{F}_{j,i} - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{i,j}$$

y si sumamos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right) &= \sum_{i \neq j} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i = \left(\sum_{j>i} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{j<i} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} \right) + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i \\ &= \left(\sum_{j>i} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{i<j} \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{F}_{i,j} \right) + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j>i} U_{i,j} \right) + \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i\end{aligned}$$

obtenemos

$$\boxed{\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i}$$

con las definiciones

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad U = \sum_{j>i} U_{i,j}$$

El cambio de energía $E = T + U$ es realizado por el trabajo hecho por las fuerzas externas.

Definamos la transformación al centro de masa $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{R}_{CM} - \mathbf{r}_i$, lo que nos permite separar

$$T = \sum_i \frac{m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2}{2} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i \frac{m_i |\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i|^2}{2}$$

con lo que la energía cinética se descompone en las energías del centro de masa y relativo al centro de masa respectivamente. Esto será muy útil mas adelante.

1.2.3. Momento angular: momento 1 en velocidad y 1 en posición

De la misma forma que antes tomemos el producto cruz con la ecuación de movimiento para obtener

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) - \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Definimos el momento angular como el producto $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Sumando tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) &= \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \left(\sum_{i < j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{i > j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} \right) + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \\ &= \left(\sum_{i < j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} + \sum_{j > i} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} \right) + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \left(\sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j,i} \right) + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

el termino entre paréntesis es cero para fuerzas centrales. El momento angular total se conserva si no hay torques externos.

Además tenemos que el momento angular total se puede descomponer en

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_{CM} \times \mathbf{P}_{CM} + \sum_i \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{p}}_i$$

el momento angular del centro de masa y relativo al centro de masa respectivamente.

1.3. Espacio de Fase

En general podemos definir un espacio de fase con las siguientes variables,

$$\mathbf{Q} = m\{x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n\} \quad \mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_n, F_1, \dots, F_n\}$$

dado que

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{P}$$

Este espacio e fase describe la evolución de las trayectorias completamente. Para el caso de que las fuerzas dependen del tiempo, tenemos que extender la dimensionalidad del espacio de fase a $d = 2n + 1$. Cuando existe un principio de conservación de energía, una constante del movimiento existe, se puede usar esta constante de movimiento para integrar las ecuaciones de movimiento. El gran problema es como definimos las variables apropiadas para describir el espacio de fase cuando las coordenadas estándar tienen restricciones. La solución yace en las **variables generalizadas**.

Como ejemplo trabajaremos con el problema de un péndulo. Aunque un péndulo es un problema altamente restringido, es un problema suficientemente fácil para el cual podemos encontrar **variables generalizadas** que ya incluyen las restricciones.

1.4. Ejemplo: El péndulo

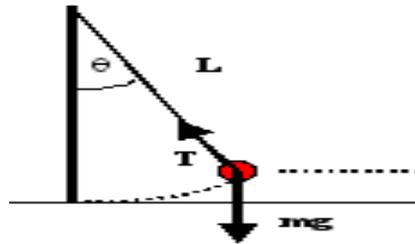


Figura 1: Diagrama de fuerzas para el péndulo

Para el péndulo definimos $\theta(t)$ como la variable que depende del tiempo. La posición del péndulo en el sistema inercial del soporte (con x aumentando hacia la izquierda e y hacia arriba) es

$$\mathbf{r}(t) = L \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - L \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$$

y las fuerzas son

$$\mathbf{F}_T = -T \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + T \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{F}_g = -mg \hat{\mathbf{y}}$$

Podemos proyectar la ecuación de Newton

$$\frac{d m \mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

que esta definida en el sistema inercial del soporte, en la dirección radial $\hat{\mathbf{r}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$ y tangencial $\hat{\mathbf{t}} = -\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$ con lo que se puede escribir las ecuaciones de movimiento en termino de

$$m \frac{d^2}{dt^2} [L\theta(t)] = -mg \sin \theta(t)$$

?Que pasa con el otro componente de la fuerza?

En este caso tenemos una ecuación de segundo orden para el componente tangencial de la ecuación de Newton

$$q_1(t) = \theta(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dq_1}{dt} = q_2$$

$$q_2(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{g}{L} \sin(q_1)$$

La solución de esta ecuación es una función elíptica.

1.4.1. Solución cercana a los puntos de equilibrio: método directo

Muchas veces se puede entender el comportamiento de un sistema de ecuaciones encontrar los **puntos de equilibrio**, este es donde $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, lo que sucede cuando

$$q_2 = 0 \quad q_1 = n\pi$$

Obviamente el punto $(q_1 = 2n\pi, q_2 = 0)$ es un **equilibrio estable**, mientras que $(q_1 = (2n + 1)\pi, q_2 = 0)$ es un punto de **equilibrio inestable**. Calculemos una perturbación cercana a estos puntos

$$q_1 = n\pi + \delta q_1 \quad q_2 = \delta q_2$$

Expandiendo las ecuaciones de arriba tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{d\delta q_1}{dt} \\ \frac{d\delta q_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^n \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{bmatrix}$$

con esta matriz constante \mathbf{A} .

Una forma de resolver este problema es

$$\delta \mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t} \delta \mathbf{q}(0)$$

ya que \mathbf{A} es una matriz constante. Si la matriz \mathbf{A} se puede diagonalizar, (si existe una base para hacerlo), entonces

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}$$

donde las columnas de la matriz $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_d]$ son los vectores propios de \mathbf{A} y $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal con los valores propios (si existen). Podemos entonces escribir

$$\delta \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta} e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\eta}^{-1} \delta \mathbf{q}(0)$$

Para el caso del péndulo obtenemos

$$\delta q_1(t) = \delta q_1(0) \cosh\left(\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}} t\right) + \frac{d\delta q_1(0)}{dt} \frac{1}{\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}}} \sinh\left(\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}} t\right)$$

Para el caso de $n = 0$, que corresponde al caso de ángulos pequeños

$$\sin \theta \sim \theta$$

la solución, usando $\omega_o^2 = g/L$, es

$$q_1(t) = q_1(0) \cos(\omega_o t) + \frac{q_2(0)}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$$

$$q_2(t) = q_2(0) \cos(\omega_o t) - \omega_o q_1(0) \sin(\omega_o t)$$

1.4.2. Solución cercana a los puntos de equilibrio: modos normales primer orden

La solución completa se puede representar como una transformada de Laplace,

$$TL[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

donde

$$TL\left[\frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}(t)\right] = p TL[\delta \mathbf{q}] - \delta \mathbf{q}(0)$$

y por lo tanto, tenemos

$$(p - \mathbf{A}) TL[\delta \mathbf{q}] = \delta \mathbf{q}(0)$$

Cuando integremos en el plano complejo para encontrar la transformada inversa $\delta \mathbf{q}(t)$, vemos que los polos van a estar dados por los ceros de

$$\text{Det}[p - \mathbf{A}] = 0$$

lo que determina los modos discretos del sistema. En muchas aplicaciones esta expresión se denomina la **relación de dispersión**.

Lo anterior es equivalente a buscar soluciones en **modos normales**

$$\boldsymbol{\eta}_i(t) = \boldsymbol{\eta}_i(0) e^{\lambda t}$$

Dado que tenemos $2d$ ecuaciones lineales, estos modos no interactúan entre ellos, y por lo tanto son independientes. Los llamaremos **modos normales**. Es importante darse cuenta que hay un número discreto de estos modos, que satisfacen

$$\text{Det}[\mathbf{A} - \lambda] = 0$$

Vemos que si tenemos soluciones complejas para λ , estas vienen en complejos conjugados. Para perturbaciones cercanas a los equilibrios del péndulo los modos son

$$\lambda_{\pm} = \omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}} \quad \rightarrow \quad \eta_{\pm} = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n+1}} \omega_o}, 1 \right]$$

o en otras palabras

$$\begin{aligned} \theta = 2n\pi & \quad \rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \pm i\omega_o & \quad \eta_{\pm} = [\mp i, 1] \\ \theta = (2n+1)\pi & \quad \rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \pm \omega_o & \quad \eta_{\pm} = [\pm 1, 1] \end{aligned}$$

En forma general cualquier solución se puede escribir entonces como

$$\delta \mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \boldsymbol{\eta}_i(0) e^{\lambda_i t}$$

si los $\boldsymbol{\eta}_i$ forman un base. Los α_i dependen de las condiciones iniciales, para lo cual se requiere invertir la relación matricial

$$\delta \mathbf{q}(0) = \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\alpha}$$

ya que $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_{2d}]$. Por lo tanto $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}^{-1} \delta \mathbf{q}(0)$ y la solución es entonces

$$\delta \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\eta} e^{\Lambda t} \boldsymbol{\eta}^{-1} \delta \mathbf{q}(0)$$

que es la solución que teníamos anteriormente.

1.4.3. Solución cercana a los puntos de equilibrio: modos normales segundo orden

A medida que la dimensión del sistema crece, es conveniente tratar con perturbaciones de ecuaciones de segundo orden en forma directa. Esto implica construir los modos normales directamente como

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_o e^{\lambda t}$$

Para el caso del péndulo

$$\frac{d^2 \delta q}{dt^2} = \omega_o^2 (-1)^{n+1} \delta q$$

tenemos

$$[\lambda^2 - \omega_o^2 (-1)^{n+1}] \eta_o = 0$$

donde claramente tenemos dos modos normales

$$\lambda_{\pm} = \pm\lambda_o \quad \rightarrow \quad \lambda_o = \omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}}$$

y la solución completa debería entonces ser

$$\delta q(t) = C_+ e^{+\lambda_o t} + C_- e^{-\lambda_o t}$$

Dadas las condiciones iniciales, necesitamos invertir esta relación

$$\begin{bmatrix} \delta q(0) \\ \frac{d\delta q(0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_o & -\lambda_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+ \\ C_- \end{bmatrix}$$

podemos entonces encontrar la misma solución que antes para el péndulo

$$\delta q_1(t) = \delta q_1(0) \cosh\left(\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}} t\right) + \frac{d\delta q_1(0)}{dt} \frac{1}{\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}}} \sinh\left(\omega_o \sqrt{(-1)^{n+1}} t\right)$$

En el caso que tengamos mas ecuaciones, el análisis es el mismo, pero esta claro que hay que invertir una matriz mas grande, ya que

$$\delta \mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^d (C_+ e^{+\lambda_i t} + C_- e^{+\lambda_i t}) \boldsymbol{\eta}_i$$

Notemos algunas cosas:

1. los puntos $\theta = (2n + 1)\pi$ (arriba) son **equilibrios inestables** ya que por lo menos uno de los valores propios satisface $Re[\lambda_+] > 0$. Estos puntos ahora los llamaremos **puntos hiperbólicos**. Estos puntos tienen **variedades estables** (correspondiente a la dirección de λ_-) y **variedades inestables** (correspondiente a la dirección de λ_+). Para que sea un **puntos hiperbólicos** ninguno de los valores propios puede ser cero. Mirar el diagrama de fase en la Fig. 2
2. los puntos $\theta = 2n\pi$ (abajo) aveces se denominan **centros** ya que $Re[\lambda_i] = 0$. Estos puntos ahora los llamaremos **puntos elípticos**. Mirar el diagrama de fase en la Fig. 2.
3. los valores propios vienen en pares $\pm\lambda_i$. Esto es un resultado general de sistemas que se pueden derivar de un **Hamiltoniano** (ver mas abajo).
4. De hecho $\sum_i \lambda_i = 0$ en un sistema Hamiltoniano. Por lo tanto los puntos elípticos e hiperbólicos son las dos únicas posibilidades en sistemas Hamiltoniano. No pueden haber **equilibrios estables**, a menos que introduzcamos una disipación, pero esto implica que el sistema deja de ser Hamiltoniano.

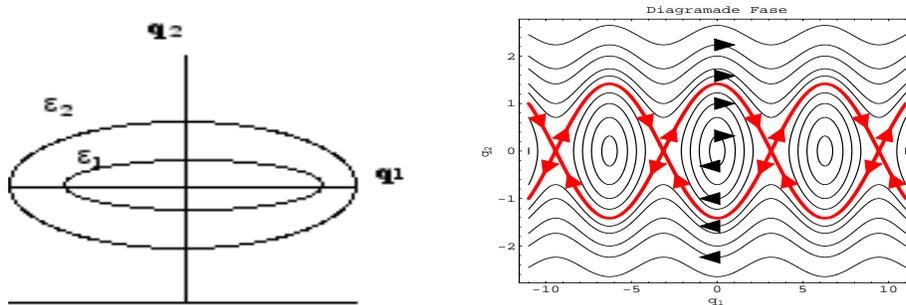


Figura 2: Diagrama de Fase para el péndulo.

1.4.4. Solución utilizando el principio de conservación de la energía:

Ya que la fuerza es conservativa (notar que la tensión no hace trabajo ya que es perpendicular al desplazamiento) se puede definir la energía potencial

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

Haciendo el cambio de variables $q_1(t) = \theta(t)$, $q_2(t) = \dot{\theta}(t)\sqrt{g/2L}$, $\epsilon^2 = 2E/gmL$ obtenemos

$$\epsilon^2 = q_2^2 + (1 - \cos q_1)$$

Para el caso de pequeños ángulos tenemos para el principio de conservación de energía

$$\epsilon^2 = q_2^2(t) + q_1^2(t)$$

lo que define la ecuación de un círculo, o una elipse en el espacio $\theta - \dot{\theta}$. En el espacio de fase las soluciones están especificadas por las condiciones iniciales de $q_1(0)$ y $q_2(0)$, lo que define la constante ϵ y por lo tanto la trayectoria para todos los tiempos. La evolución temporal de la trayectoria se puede resolver de la ecuación de conservación de energía.

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2E}{mL^2} - \frac{g}{L}\theta^2(t)} \quad \rightarrow \quad t - t_o = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\theta_o}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\epsilon^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{L}{g}} (\text{Sin}^{-1}\theta(t) - \text{Sin}^{-1}\theta_o)$$

Todo esto funciona para pequeños ángulos. A medida que aumentamos la velocidad inicial vemos que existe una condición donde obtenemos soluciones que rotan, y ya no tenemos más oscilaciones. Esto sucede cuando $q_1(0) = 0$ y $q_2(0) = \sqrt{2}$, y por lo tanto $\epsilon^2 = 2$. Para este caso particular no es difícil demostrar que el péndulo se demora un tiempo infinito en llegar a $\theta = \pi$

$$\omega_o T = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{2 - (1 - \cos \theta)}} \rightarrow \infty$$

Esta trayectoria es la **separatriz** entre movimiento oscilatorio y movimiento de rotación. En la Fig. 2 se muestra el espacio de fase. La separatriz generalmente conecta puntos hiperbólicos como se ve en la Fig. 2. Notemos que si perturbamos un sistema Hamiltoniano, las cosas interesantes van a

suceder cerca de la separatriz del movimiento rotatorio y oscilatorio en el caso del péndulo simple. Veremos esto en detalles mas adelante.

1.4.5. El péndulo con fricción:

Describe el espacio de fase para condiciones arbitrarias del péndulo

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = 0$$

2. Soluciones numéricas

Ya hemos visto que el encontrar una solución a alguno de estos problemas significa integrar n ecuaciones de segundo orden, o 2n ecuaciones de primer orden. Estas ecuaciones son en principio no-lineales y en la mayoría de los casos es muy complicado escribir en forma cerrada una solución. Para estos casos utilizamos integraciones numéricas.

El método de Runge Kutta se usa generalmente para integrar un set acoplado de ecuaciones diferenciales en un espacio de fase (osea solo ecuaciones de primer orden existen)

$$\dot{x}_i(t) = F_i(x(t), t)$$

la integración numérica de t a $t + \Delta t$ se realiza de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \mathbf{F}\left(\mathbf{x}(t) + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \mathbf{F}\left(\mathbf{x}(t) + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{k}_3, t + \Delta t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Para encontrar una solución numérica de 0 a t, se iteran estas ecuaciones desde una condición inicial en $t = 0$.

2.0.6. Ejemplo: El péndulo forzado

Al péndulo simple le incluimos fricción y un forzamiento para obtener la siguiente ecuación

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = A \cos \omega t$$

El parámetro ω_o^2 se puede **escalar** con el tiempo para obtener

$$\ddot{\theta} + \bar{\beta}\dot{\theta} + \sin \theta = \bar{A} \cos(\bar{\omega}t)$$

En general conocemos las soluciones asintóticas para pequeños ángulos ($A \ll 1$) cerca de los puntos de equilibrio ($\theta = 2n\pi$), ya que

$$\theta(t) = \frac{A}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + (\beta\omega)^2} [(\omega_o^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \beta\omega \sin(\omega t)]$$

lo que representa elipses en el espacio $\theta - \dot{\theta}$. Obviamente a medida que A aumenta en alguna parte se rompe la aproximación. Podemos graficar diferentes trayectorias para diferentes condiciones iniciales como se muestra en la Fig. 2.0.6.

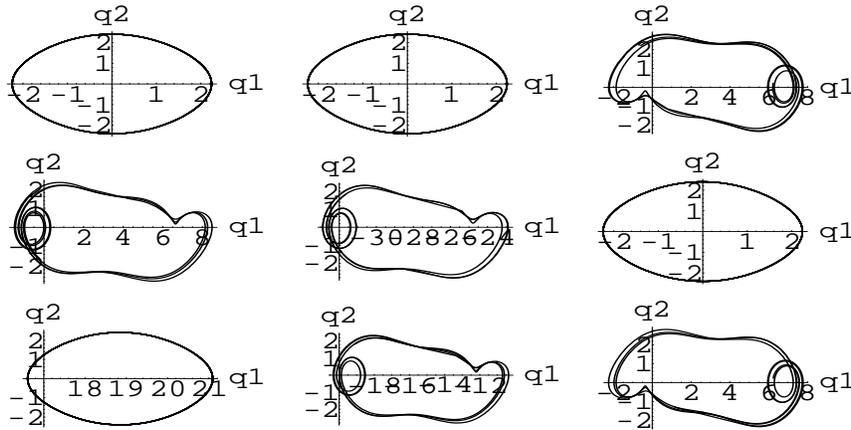


Figura 3: Diferentes atractores del péndulo forzado con $\beta = 0,1$, $\omega = \omega_o = 1$ y $A = 1,2$

Nos damos cuenta que hay varios **atractores** (sets a los cuales las trayectorias convergen con $t \rightarrow \infty$) en este sistema. Estos atractores son en general **ciclos límites**. De hecho no es difícil de demostrar que existen tres posible tipos de atractores

- puntos de equilibrio
- ciclos límites
- atractor caótico

Notemos que para el péndulo forzado tenemos varios atractores conviviendo en el espacio de fase. Por ejemplo en la Fig. 4 vemos los dos atractores para $\omega = \omega_o$, $\beta = 0,1$ y $A = 2,0$. Otra forma de visualizar esto es definir las secciones o **cortes estroboscópicos** evaluando cada $\omega T = 2\pi n$ generando un mapa para θ_n y $\dot{\theta}_n$. Esto es un caso especial de **sección de Poincare** que veremos mas adelante. Con el corte estroboscópico podemos evaluar a cual atractor convergemos, ya que cada atractor tiene velocidad angular diferente en $t = 2n\pi$.

Cada atractor tiene una **cuenca de atracción** de condiciones iniciales que convergen al atractor. Por ejemplo, para este caso particular del péndulo forzado mostramos las cuencas de atracción de

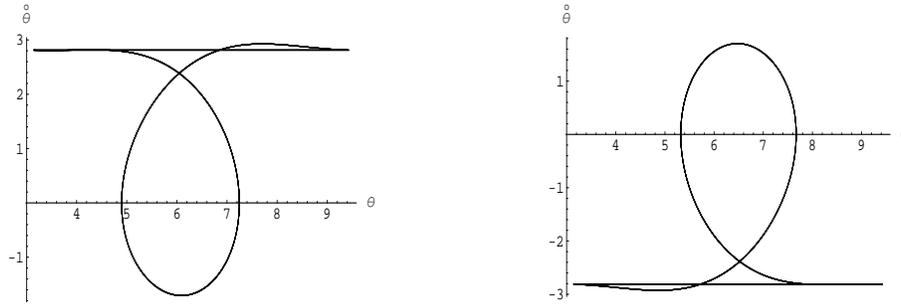


Figura 4: Dos atractores del péndulo forzado para $\beta = 0,1$, $\omega = \omega_o = 1$ y $A = 2$

cada atractor en la Fig. 2.0.6. Vemos claramente que las cuencas son **fractales** y tremendamente enredadas. Esto demuestra **sensibilidad a las condiciones iniciales**, ya que es difícil predecir a cual atractor una condición inicial va a converger.

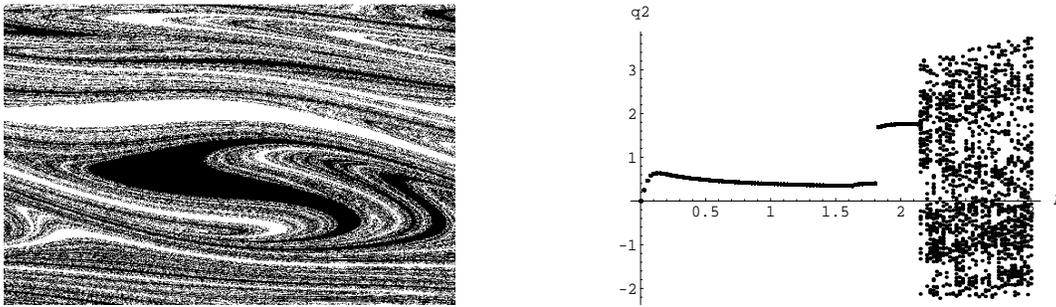


Figura 5: (a) Cuenca de atracción para los diferentes atractores del péndulo forzado para $A = 2$. (b) Diagrama de Bifurcación. Usamos $\beta = 0,1$ y $\omega = \omega_o = 1$.

Es posible ver que pasa con los atractores a medida que cambiamos un parámetro. Por ejemplo Fig. 2.0.6 muestra el **diagrama de bifurcación** con el parámetro A del mapa estroboscópico para una condición inicial. Este diagrama se construye siguiendo el atractor a medida que variamos A .

2.1. Sistemas inerciales

Los sistemas de coordenadas inerciales son definidos por la primera ley de Newton. Estos se definen como sistemas de coordenadas en los cuales los cuerpos se mueven con velocidad constante si no les afecta ninguna fuerza, esto implica, $\dot{p} = 0$.

Supongamos dos tipos de sistemas no inerciales. Uno en aceleración lineal y otro en rotación uniforme.

2.1.1. Aceleración lineal

Supongamos que vamos en un bus que esta acelerando con \mathbf{a} . Además observamos que un péndulo colgado del techo de la micro tiene una inclinación θ .

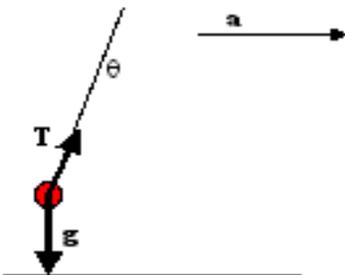


Figura 6: Sistema no inercial

En el sistema de referencia inercial en la calle (no en el bus) nos damos rápidamente cuenta que el péndulo tiene esta inclinación porque esta siendo acelerado. Ahora, un pasajero en el bus se da cuenta inmediatamente que no esta en un sistema inercial y estima la aceleración por el ángulo.

$$\left. \begin{array}{l} ma = T \sin \theta \\ 0 = -mg + T \cos \theta \end{array} \right\} \rightarrow a = g \tan \theta$$

Es importante notar que estos cálculos fueron hechos en el sistema de coordenadas inercial.

2.1.2. Rotación

Otro ejemplo de un sistema de referencia no inercial es un sistema sobre la tierra, la cual rota con velocidad angular ω . Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia, uno inercial K y otro no-inercial $\bar{K}(t)$ que rota con velocidad angular ω_o . Por lo tanto $\bar{K}(t)$ no es un sistema inercial, pero podemos definir como se relacionan las fuerzas en los diferentes sistemas de coordenadas.

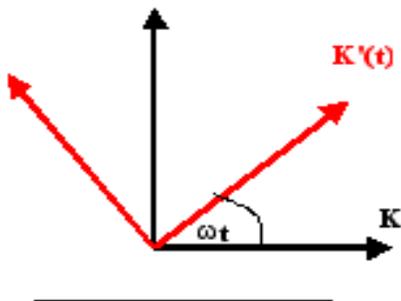


Figura 7: Sistema rotando

Por simpleza asumiremos que $\omega = \omega_o \hat{z}$. El caso general se puede probar de la misma manera. Las coordenadas entre K y $\bar{K}(t)$ están relacionadas por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t) \bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_o t & -\sin \omega_o t & 0 \\ \sin \omega_o t & \cos \omega_o t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix}$$

Las velocidades en el sistema de coordenadas K y $\bar{K}(t)$ están relacionadas por

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{A}(t)}{dt^2}\bar{\mathbf{r}}(t) + 2\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt} + \mathbf{A}(t)\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt^2}$$

Es fácil darse cuenta que esto implica

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt} &= \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} - \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\bar{\mathbf{r}}(t) \\ &= \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} &= \mathbf{A}^{-1}(t)\left[\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}(t)}{dt^2}\bar{\mathbf{r}}(t) - 2\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt}\right] \\ &= \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt}\end{aligned}$$

Este resultado en termino de vectores es completamente exacto y completamente independiente de la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Ahora, el sistema de referencia K es inercial, por lo tanto las ecuaciones de Newton se pueden usar, osea

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} = \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))}{m}\Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{r}}(t)} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}(t)) - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$

Es importante notar que $\bar{r}^2 = r^2$. Llegamos al resultado esperado que en sistemas de referencia que están acelerados vemos fuerzas ficticias (hay otro termino si $\boldsymbol{\omega}(t)$ depende del tiempo). El primer termino es la fuerza centrífuga y el segundo termino es la fuerza de Coriolis. La fuerza de Coriolis es fundamenta para entender el clima en la tierra. La tierra es un sistema de referencia acelerado en rotación y por lo tanto estas fuerzas ficticias pueden ser observadas. La fuerza centrífuga efectivamente solo cambia la constante de aceleración

$$\mathbf{g} = g_o\hat{\mathbf{r}} - R_o\omega_o^2\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) = g_o\hat{\mathbf{r}} - R_o\omega_o^2 \cos \lambda \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

en diferentes latitudes λ . La variación es $R_o\omega_o^2 = 0,034 \text{ m/s}^2$.

Ejemplo: Que pasa si nos dejamos caer una pelota de una altura h. En este caso podemos relacionar el sistema en el centro de la tierra y en la superficie como

$$\mathbf{r} = (x(t), y(t), R + z(t))$$

En este sistema de referencia, tenemos

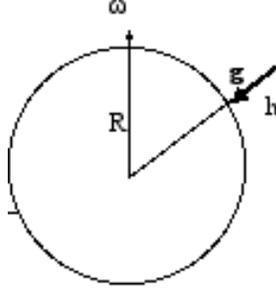


Figura 8: Superficie de la tierra

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_o \{0, -\cos \lambda, \sin \lambda\} = \omega_o \hat{\boldsymbol{\omega}}$$

Podemos normalizar las distancias con la altura

$$\frac{\mathbf{r}}{h} = \frac{R}{h} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{s} = R \hat{\mathbf{z}} + (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

y el tiempo con $\tau = (h/g_o)^{1/2} t$ tal que la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} = -\hat{\mathbf{z}} - [\alpha^2 \hat{\boldsymbol{\omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{z}})] - \left[\beta^2 \hat{\boldsymbol{\omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{s}) + 2\beta \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \right]$$

donde $\ll 1$ y $\beta^2 = \omega_o^2 h/g_o \ll \alpha^2 = \omega_o^2 R/g_o \ll 1$. Las ecuaciones son en termino de los componentes

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= 0 & +\beta (\dot{\bar{z}} \cos \lambda + 2\dot{\bar{y}} \sin \lambda) & +\beta^2 (\bar{x}) \\ \ddot{\bar{y}} &= \alpha^2 \sin \lambda \cos \lambda & +\beta (-2\dot{\bar{x}} \sin \lambda) & +\beta^2 (\bar{z} \sin \lambda \cos \lambda + \bar{y} \sin^2 \lambda) \\ \ddot{\bar{z}} &= -1 + \alpha^2 R \cos^2 \lambda & +\beta (-2\dot{\bar{x}} \cos \lambda) & +\beta^2 (\bar{z} \cos^2 \lambda + \bar{y} \sin \lambda \cos \lambda) \end{aligned}$$

Notemos que los términos no inerciales son mucho mas pequeños que el termino de caída libre. Por lo tanto, podemos asumir que la pelota cae esencialmente como en caída libre

$$z[t] = h - \frac{1}{2} g_o t^2 \quad \rightarrow \quad \bar{z}(t) = 1 - \frac{1}{2} \tau^2$$

a primer orden. Con esta primera aproximación podemos encontrar la ecuación de movimiento para \bar{x} y \bar{y} a primer orden en los parámetro pequeños $\beta \ll \alpha$ definidos arriba. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} &= \beta \dot{\bar{z}} \cos \lambda & = -\beta \tau \cos \lambda \\ \ddot{\bar{y}} &= \alpha^2 \sin \lambda \cos \lambda & = \alpha^2 \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\beta \frac{\tau^3}{6} \cos \lambda \\ \bar{y} &= \alpha^2 \frac{\tau^2}{2} \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto el primer termino en cada caso es

$$\Delta x = h\bar{x}(\sqrt{2}) = -h\beta\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\lambda + \dots$$
$$\Delta y = h\bar{y}(\sqrt{2}) = h\alpha^2\sin\lambda\cos\lambda + \dots$$

Pregunta: Por un rato olvidémosnos de la traslación de la tierra alrededor del sol. Como se resolvería este problema desde un sistema de referencia inercial fijo con el sol?

Pregunta: Por que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}[\mathbf{r}] = g\hat{\mathbf{z}}$ en el sistema $\bar{\mathbf{K}}(t)$?

Ejemplo: La ecuación de un proyectil en la tierra es complicada pero muy demostrativa y se puede hacer por computador. Para este caso es conveniente escribir transformar a $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ en el sistema sobre la superficie de la tierra.

Ejemplo: El péndulo de Foucault también es muy demostrativo y se puede hacer analíticamente. Para este caso es conveniente escribir transformar a $x, y, R + z$ en el sistema local sobre la superficie de la tierra. Estamos interesados en encontrar $\dot{\phi}$.

3. Formalismo 2: Principio de Hámilton

Si definimos el siguiente funcional, que de ahora en adelante llamaremos Lagrangiano,

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = -\nabla U(\mathbf{r})}$$

las ecuaciones de Newton. **Por lo tanto vemos que el sistema de coordenadas r debe de ser inercial.** Notemos que fácilmente podemos permitir potenciales **no conservativos** de la forma $U(\mathbf{r}, t)$, mientras

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{x}, t)$$

en el sistema inercial. Luego veremos como introducir potenciales dependientes de las velocidades.

El principio de Hámilton es muy general y reformula la mecánica clásica con el siguiente postulado:

De todas las posibles trayectorias que un sistema dinámico realiza de un punto a otro en el espacio de coordenadas en un intervalo de tiempo, el sistema realiza la trayectoria que minimiza la integral del Lagrangiano, $L=T-U$, del sistema en el tiempo. T y U están escritos en un sistema inercial.

$$\boxed{S = \int \mathcal{L} dt}$$

Es inmediatamente obvio que este principio se generaliza tanto en varias dimensiones como para varias partículas usando las respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange. Por lo tanto el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - U = \sum_i \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{x}, t)$$

donde hemos definido la variable $\mathbf{x} = \{r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}, \dots, r_{d,1}, r_{d,2}, r_{d,3}\}$ ahora es una lista de largo $n = 3d$, correspondiente a d partículas. Incluso la ecuación de la evolución de los campos, no solo partículas puntuales, pueden ser expresadas en termino de funcionales a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver mas abajo).

La razón principal para considerar este nuevo formalismo es le hecho que la mayoría de los problemas en los cuales estamos interesados incluyen restricciones, las cuales están establecidas por fuerzas

de restricción. El principio de Hámilton es muy general y da una flexibilidad enorme al resolver problemas, ya que para problemas complejos el manejar fuerzas y vectores es bastante complicado, mientras el Lagrangiano es simplemente un escalar. **El Lagrangiano en una transformación de coordenadas se transforma como si fuera un escalar**, como vimos en el capítulo anterior. Esto garantiza que la dinámica de los dos sistemas de coordenadas son consistentes a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

3.1. Variables generalizadas y restricciones

Supongamos que tenemos en el caso general de un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - U$$

en el sistema inercial en n coordenadas $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (en un sistema inercial) que tienen que satisfacer ciertas restricciones

$$g_j(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

mantenidas por fuerzas de restricción. Este tipo de restricciones se denominan restricciones holonómicas (Holonomic constraints) que son descritas por un conjunto de m ecuaciones independientes que restringen las variables. No podemos escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange para estas variables ya que las variaciones $x_i(t) + \varepsilon h_i(t)$ no son independientes.

Vimos en el capítulo anterior que es posible re-escribir el Lagrangiano en término de nuevas variables sin afectar la dinámica. Por lo tanto, si somos capaces de encontrar una transformación

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{n-m}, t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

en término de $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$ variables independientes, que llamaremos **variables generalizadas**, tenemos garantizados que el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = L(t, q_1, \dots, q_{n-m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-m})$$

también es consistente con las ecuaciones de movimiento. Es importante acordarse que esto implica que L se debe de transformar como un escalar. Ahora podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre

$$\mathcal{L}(t, q_1, \dots, q_{n-m}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-m})$$

ya que las variaciones correspondientes a $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$ son independientes. Tenemos garantizados obtener las ecuaciones de movimiento del sistemas para estas variables generalizadas como vimos en el capítulo anterior. Una vez que tenemos $q_i(t)$ se puede obtener $x_j(t)$ en forma directa.

Ejemplo: en la superficie de una esfera tenemos 3 variables dependientes, $\{x, y, z\}$ que tienen la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ por lo cual conviene utilizar dos variables independientes $\{\theta, \phi\}$ como **variables generalizadas**. Si además el cuerpo siente la fuerza de gravedad, podemos escribir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - mgz = \frac{1}{2}mr^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] - mgr \cos \theta$$

de donde podemos encontrar las ecuaciones de movimiento directamente porque las variaciones son independientes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [mr^2 \dot{\theta}] &= mr^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta \\ \frac{d}{dt} [mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta] &= 0 \end{aligned}$$

Primero notemos que tenemos el principio de conservación

$$p_\phi = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{const}$$

Ahora nos concentraremos en los puntos de equilibrio $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$, que nos da

$$\theta = n\pi$$

Notemos que en el punto de equilibrio $p_\phi = 0$. Ahora asumamos una pequeña perturbación $\theta = n\pi + \eta_\theta$ Primero estudiaremos que pasa con el principio de conservación, al estimar cuando varia p_ϕ en

$$mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

Vemos que en ambos casos continua siendo $p_\phi = 0$. La ecuación de movimiento para η_θ en forma linealizada es

$$\ddot{\eta}_\theta = (-1)^n \frac{g}{r} \eta_\theta$$

la cual tiene la solución que estudiamos anteriormente. Osea tenemos una oscilación estable con frecuencia $\omega_o^2 = g/r$ en $\theta = \pi$ como es de esperarse.

Notemos que también hay otra solución de equilibrio dada por $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ con $\dot{\phi} = \omega_\phi = \text{const} \neq 0$. Notemos que es este caso el equilibrio es la solución de

$$\cos \theta_o = -\frac{\omega_o^2}{\omega_\phi^2} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

Por ahora asumamos que $\alpha \geq 1$ ($\omega_\phi > \omega_o$) para que tengamos solución a la ecuación de equilibrio. Esto implica que $p_\phi = mr^2 \omega_\phi \sin^2 \theta_o = \text{const}$. Ahora miremos la estabilidad de esta solución imponiendo una pequeña perturbación $\theta = \theta_o + \eta_\theta$ y $\dot{\phi} = \omega_\phi + \dot{\eta}_\phi$, lo que nos da las ecuaciones

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_\theta &= [\alpha(\alpha^4 - 1)]\eta_\theta + [2\sqrt{\alpha^4 - 1}]\dot{\eta}_\phi \\ \ddot{\eta}_\phi &= -2\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - 1}}\dot{\eta}_\theta\end{aligned}$$

Luego de normalizar el tiempo con ω_o , podemos encontrar una solución para $\eta = [\eta_\theta, \eta_\phi, \dot{\eta}_\theta, \dot{\eta}_\phi]$ con

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \omega_o \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}(0) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}(t) = e^{\mathbf{A}\omega_o t} \boldsymbol{\eta}(0)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha(\alpha^4 - 1) & 0 & 0 & 2\sqrt{\alpha^4 - 1} \\ 0 & 0 & -2\alpha/\sqrt{\alpha^4 - 1} & 0 \end{bmatrix}$$

Como notamos anteriormente podemos también buscar soluciones del tipo $\boldsymbol{\eta}e^{\lambda t}$, que nos permiten encontrar

$$\lambda_0^2 = 0 \quad \lambda_1^2 = -\frac{3 + \alpha^4}{\alpha^2}$$

Vemos que tenemos 2 soluciones oscilatorias y dos soluciones que parecen ser marginales (entre estabilidad e inestabilidad). Al calcular $Exp[\mathbf{A}\omega_o t]$ nos damos cuenta que la solución es oscilatoria para η_θ y $\dot{\eta}_\phi$. Las dos soluciones marginales corresponden al componente secular de η_ϕ .

Notemos que los términos seculares tienen que ver con la conservación de p_ϕ , ya que

$$p_\phi = mr^2\omega_\phi \sin^2 \theta_o + mr^2 (\dot{\eta}_\phi \sin^2 \theta_o + \omega_\phi 2 \sin \theta_o \cos \theta_o \eta_\theta) = const$$

y por lo tanto $\dot{\eta}_\phi$ está relacionado con η_θ . Vemos claramente que deberían haber 2 términos seculares. De hecho es posible resolver por $\dot{\eta}_\phi$ en término de η_θ y substituir en la ecuación para η_θ , para obtener una ecuación solo para η_θ .

De hecho, integrando la segunda ecuación podemos escribir

$$\ddot{\eta}_\theta = - \left[\frac{3 + \alpha^4}{\alpha^2} \right] \eta_\theta$$

Por lo tanto el método general para resolver un problema con restricciones es:

1. Escribir el Lagrangiano en el sistema inercial correspondientes en variables cartesianas x_i . Solo las fuerzas reales que ejercen trabajo hay que incluirlas. Si las fuerzas de restricción ejercen trabajo, no podemos utilizar este formalismo.
2. Encontrar un set de variables generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$ que incluyan las restricciones automáticamente $x_i(q_1, q_2, \dots, q_{n-m}, t)$
3. Re-escribir el Lagrangiano en termino de las variables generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$
4. Aplicar el formalismo de Euler-Lagrange en termino de variables generalizadas independientes, $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$
5. Resolver las ecuaciones diferenciales
6. Re-escribir las soluciones en el sistema inercial $x_i(q_1, q_2, \dots, q_{n-m}, t)$

Por lo tanto en termino del principio de Hámilton es fácil comprobar que todo lo que tenemos que hacer es re-escribir el Lagrangiano en termino de variables generalizadas y aplicar el formalismo de Euler-Lagrange.

Nos damos cuenta que en U incluiremos las fuerzas que ejercen trabajo. Ya que las restricciones son mantenidas por fuerzas de restricción, estamos interesados en el caso que las fuerzas de restricción que no hacen trabajo, y por lo tanto no deben de ser incluidas en U. Por ejemplo cuando una partícula se mueve en una superficie las fuerzas que mantienen esta restricción es perpendicular a los desplazamientos. Las fuerzas de fricción que permiten a un cuerpo rodar sin resbalarse en una superficie tampoco hacen trabajo ya que el punto de contacto esta instantáneamente detenido, y por lo tanto no ejerce trabajo. Ahora, una partícula resbalando con fricción no satisface este principio y por lo tanto necesita otro tipo de formalismo (esto en principio no es problema ya que esta es una fuerza macroscópica y empírica, no una de las fuerzas básicas de la naturaleza). Para el caso que tengamos restricciones que varíen en el tiempo, como una superficie que se mueve, todo lo que tenemos que garantizar para usar este principio es que las fuerzas no hagan trabajo a tiempo constante (esto se llama trabajo virtual como veremos mas adelante).

En general este análisis se puede formular en forma más abstracta, pero menos intuitivo, desde el punto de vista topológico usando el concepto de calculo sobre manifolds. Acá usaremos un análisis más intuitivo para obtener las ecuaciones de movimiento en termino de variables generalizadas.

Ejemplo: Péndulo simple Para el péndulo simple, podemos re-escribir el Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] - mgy$$

pero no podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange porque tenemos (usando el sistema de referencia en el eje) la restricción

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Pero podemos escribir en termino de variable generalizada $\theta(t)$

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \\ y &= -R \cos \theta \end{aligned}$$

lo que nos da el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] - mgy \quad \rightarrow \quad L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m [R\dot{\theta}]^2 - mgR(1 - \cos \theta)$$

con la variable generalizada es $\theta(t)$. Ahora podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{\theta}} = \mathcal{L}_{\theta} \quad \rightarrow \quad mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta$$

ya que θ es una variable generalizada. Esta ecuación es la misma ecuación de movimiento que encontramos anteriormente. Es importante darse cuenta que la tensión T mantiene la restricción que $x^2 + y^2 = R^2$, pero no ejerce ningún trabajo ya que es siempre perpendicular al desplazamiento $Rd\theta$. De hecho no necesitamos definir la fuerza T en este formalismo.

3.2. De Newton a Hámilton

Ahora que hemos visto que la mecánica se puede formular como un principio de optimización, en que optimizamos $\mathcal{L} = T - U$, derivaremos el principio de Hámilton desde las ecuaciones de Newton. Especial atención tendremos para el caso de restricciones. Utilizaremos la definición

$$\mathbf{x} = \{r_{1,1}, r_{1,2}, r_{i,3}, r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}, \dots, r_{d,1}, r_{d,2}, r_{d,3}\}$$

como una lista de largo $n = 3d$, correspondiente a d partículas.

Definamos un desplazamiento virtual a tiempo constante de

$$\begin{aligned} x_i(t) &\rightarrow x_i(t) + \varepsilon h_i^x(t) & i &= 1, \dots, n \\ q_i(t) &\rightarrow q_i(t) + \varepsilon h_i^q(t) & i &= 1, \dots, n - m \end{aligned}$$

que debe de ser compatible con las restricciones y las fuerzas. Ya que las coordenadas $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$ son independientes resolvemos, al menos localmente,

$$x_i = x_i(t, q_1, \dots, q_{n-m}) \quad i = 1, \dots, n$$

para lo cual podemos deducir que

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

con lo que tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Esta última relación la necesitaremos mas adelante. Además necesitamos que las variaciones h^x

$$\varepsilon h_i^x = x_i(t, q_1 + \varepsilon h_1^q, \dots, q_{n-m} + \varepsilon h_{n-m}^q) - x_i(t, q_1, \dots, q_{n-m}) = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \varepsilon h_j^q$$

satisfagan las restricciones porque las variaciones son a tiempo constante. En general tenemos

$$\dot{p}_i = F_i + f_i$$

con F_i y f_i como las fuerzas dinámicas y de restricción respectivamente (mantienen las restricciones de las variables x_i).

Entonces calculemos el trabajo virtual en esta variación virtual de $x_i(t) \rightarrow x_i + \varepsilon h_i^x$, como

$$\sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - F_i) \cdot h_i^x - \sum_{i=1}^n f_i \cdot h_i^x = 0$$

La idea es replantear estas ecuaciones en termino de las variaciones independientes h_i^q y que por lo tanto podemos variar independientemente.

Ahora nos dedicamos a las fuerzas de restricción que no ejercen trabajo virtual, osea

$$\sum_{i=1}^n f_i \cdot h_i^x = 0$$

Por ejemplo cuando una partícula se mueve en una superficie las fuerzas que mantienen esta restricción es perpendicular a los desplazamientos. Las fuerzas de fricción que permiten a un cuerpo rodar en una superficie sin resbalarse tampoco hacen trabajo ya que el punto de contacto esta instantáneamente en reposo. Ahora, una partícula resbalando con fricción no satisface este principio y por lo tanto necesita otro tipo de formalismo (esto en principio no es problema ya que esta es una fuerza macroscópica y empírica).

Así podemos definir

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i^x = \sum_{j=1}^{n-m} Q_j \cdot h_j^q \quad \rightarrow \quad Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Con un poco mas de álgebra escribiremos la otra parte del trabajo virtual en termino de variaciones independientes,

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \cdot h_i^x = \sum_{j=1}^{n-m} \left[\sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] h_j^q = \sum_{j=1}^{n-m} \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] h_j^q$$

Es fácil darse cuenta que además

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

ya que las funciones so por lo menos C^2 . Con lo cual tenemos

$$\sum_{j=1}^{n-m} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) - Q_j \right\} h_j^q = 0$$

Siendo que las variaciones h_j^q son independientes, tenemos que cada uno de los términos en paréntesis es cero,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n - m}$$

con la idea de que T y Q_j deben de ser escritos en términos de q_j y \dot{q}_j .

Al parecer no hemos logrado mucho ya que aun tenemos que hacer el trabajo de encontrar y transformar al set de variables independientes, pero veremos en los ejemplos que hemos ganado mucho en simpleza.

3.2.1. Fuerzas conservativas o derivables de un potencial

Para fuerzas derivables de un potencial tenemos que

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n, t)$$

con lo cual

$$Q_j = -\sum_{i=1}^n \nabla_i U(x_i, \dots, x_n, t) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} U(q_i, \dots, q_{n-m}, t)$$

osea la fuerzas generalizadas Q_j también se escriben en termino de gradientes, pero de las coordenadas generalizadas.

Ya que el potencial U no depende de las velocidades, tenemos que el Lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ también satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{q}_i} - \mathcal{L}_{q_i} = 0}$$

para $j = 1, \dots, n - m$.

Ejemplo: Encuentre las ecuaciones del movimiento de un anillo rodando sin resbalar en un plano inclinado.

La ecuación de restricción es

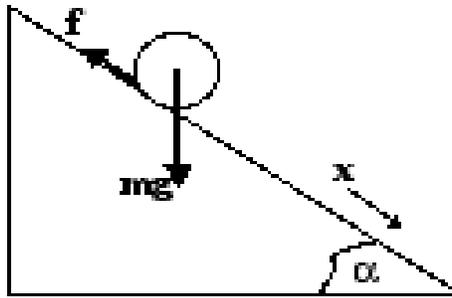
$$x = R\theta$$

Aunque existe una fuerza no conservativa, que es la fricción, esta no ejerce ningún trabajo ya que el punto de contacto tiene una velocidad cero y solo mantiene la restricción (mire los comentarios arriba).

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \right) - (-Mgx \sin \alpha) = M\dot{x}^2 + Mgx \sin \alpha$$

Por lo tanto tenemos que

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{2}$$



Problema: Una barra de masa m y largo $2L$ se encuentra clavada a un pivote de tal manera que su momento de inercia es I con respecto al centro de masa y oscila en el plano $x - y$. Encuentre el Lagrangiano en variables generalizadas y escriba las ecuaciones de movimiento. Encuentre los puntos de equilibrio $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Son estables o inestables?

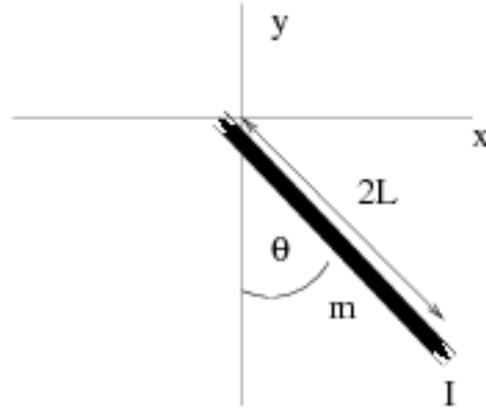
El Lagrangiano con respecto al pivote es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}mI\dot{\theta}^2 - mgy = \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta$$

y por lo tanto

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \frac{1}{\left[1 + \frac{I}{mL^2}\right]} \sin \theta$$

Problema: Ahora considere el péndulo como una masa puntual unida con una cuerda al pivote (de largo L). La cuerda no tiene masa. Suponga que el plano de oscilación comienza a girar en torno a \hat{y} con una velocidad angular Ω . Situándonos en el sistema no inercial que rota con frecuencia angular Ω . Cuales son las ecuaciones de movimiento? Que pasa con los puntos de equilibrio?



Barra oscilando

Recordemos que para sistemas no inerciales

$$\dot{r} = A [\dot{\bar{r}} - \Omega \times \bar{r}]$$

tal que $AA^T = A^T A = 1$. Por lo tanto podemos relacionar entre el sistema inercial r y el no inercial \bar{r} , como

$$\dot{r}^2 = (\dot{\bar{r}} - \Omega \times \bar{r})^2 = L^2 [\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta]$$

y por lo tanto el Lagrangiano nuevo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgy = \frac{1}{2}mL^2 [\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta] + mgL \cos \theta$$

La ecuación de movimiento es

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mL^2 \left[\frac{g}{L} - \Omega^2 \cos \theta \right] \sin \theta$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son

$$\theta = n\pi \quad \cos \theta_o = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2}$$

donde $\omega_p^2 = g/L$, frecuencia que hemos usado para normalizar el tiempo $\tau = \omega_p t$, lo que define $\alpha^2 = \Omega^2/\omega_p^2$. Haciendo una perturbación $\theta = \eta_\theta$ del primer equilibrio, tenemos

$$\ddot{\eta}_\theta = - [(-1)^n - \alpha^2] \eta_\theta$$

y por lo tanto el punto de equilibrio $\theta = 0$ corresponde a un **centro** o **punto elíptico** mientras $\alpha^2 < 1$. Este equilibrio es estable en el sentido que si agregamos una pequeña disipación,

$$\ddot{\theta} = - [1 - \alpha^2 \cos \theta] \sin \theta - \beta \dot{\theta}$$

veremos que las trayectorias decaen a estos equilibrios. Primero notemos que los puntos de equilibrio son los mismos en la presencia de la disipación, aunque el valor propio cambia en forma correspondiente. Por ejemplo para el equilibrio $\theta = 0$, tenemos

$$\ddot{\eta}_\theta = -(1 - \alpha^2)\eta_\theta - \beta\dot{\eta}_\theta$$

y si asumimos $\eta_\theta = \eta_o e^{\lambda t}$, podemos encontrar que

$$\lambda^2 + (1 - \alpha^2) + \lambda\beta = 0$$

lo cual tiene solución

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(1 - \alpha^2)} \right]$$

Por lo tanto es un **punto de equilibrio estable** (atractor) con

$$\lambda_{\pm} < 0$$

mientras $\alpha < 1$, para todo valor de $\beta > 0$. Además vemos que $\theta = 0$ es un **punto de equilibrio inestable** (“repeller”) para $\alpha > 1$, para todo valor de $\beta > 0$. El punto de equilibrio π un **punto hiperbólico** y además es un **punto de equilibrio inestable** (“repeller”) para todo α y $\beta > 0$. Esto se muestra en la Fig. 9a para $\alpha^2 = 0,5$ con un coeficiente de fricción $\beta = 0,5$.

La perturbación $\theta = \theta_o + \eta_\theta$ con respecto al equilibrio

$$\cos \theta_o = \frac{1}{\alpha^2}$$

da

$$\ddot{\eta}_\theta = -(\alpha^2 - 1)\eta_\theta$$

y por lo tanto es un **centro** o **punto elíptico** para $\alpha^2 > 1$ y un **punto hiperbólico** para $\alpha^2 < 1$. Si agregamos disipación

$$\ddot{\eta}_\theta = -(\alpha^2 - 1)\eta_\theta - \beta\dot{\eta}_\theta$$

y asumimos $\eta_\theta = \eta_o e^{\lambda t}$, podemos encontrar que

$$\lambda^2 + (\alpha^2 - 1) + \lambda\beta = 0$$

lo cual tiene solución

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha^2 - 1)} \right]$$

Por lo tanto es un **punto de equilibrio estable** (atractor) con

$$\lambda_{\pm} < 0$$

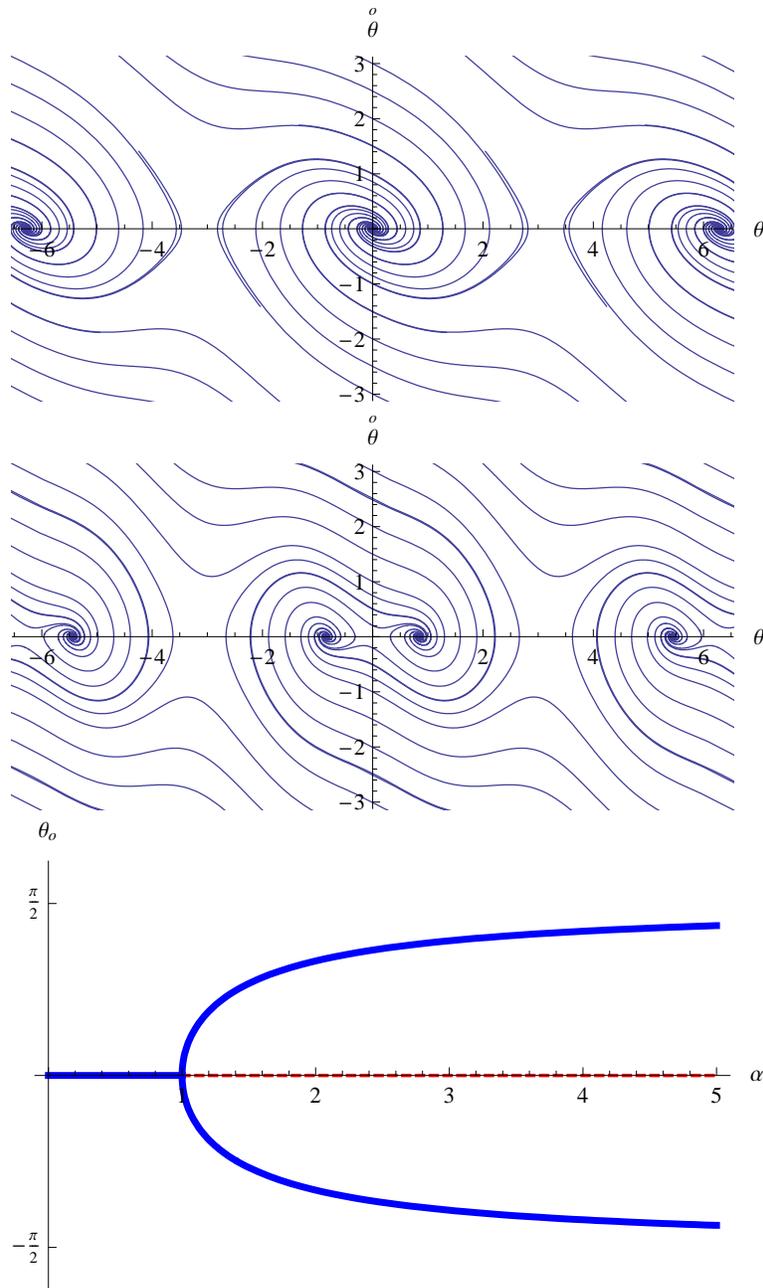


Figura 9: Espacio de fase para (a) $\alpha^2 = 0,5 < 1$ y (b) $\alpha^2 = 1,5 > 1$ con $\beta = 0,5$. (c) Diagrama de Bifurcación, En azul los puntos de equilibrio estables y en rojo los puntos de equilibrio inestables. Esto se llama una **bifurcación por doblamiento de periodo**.

mientras $\alpha > 1$, para todo valor de $\beta > 0$. Además vemos que $\theta = \theta_0$ es un **punto de equilibrio inestable** (“repeller”) para $\alpha < 1$, para todo valor de $\beta > 0$. Esto se muestra en la Fig. 9b para $\alpha^2 = 1,5$ con un coeficiente de fricción $\beta = 0,5$.

Vemos que de alguna forma los puntos de equilibrio $\theta = 0$ y $\theta = \theta_o$ cambian su estabilidad en $\alpha = 1$. El **diagrama de bifurcación** (Fig. 9c) muestra los atractores como función del parámetro α^2 .

3.2.2. Fuerzas dependientes de velocidades

Fuerzas dependientes de velocidades, como las fuerzas electromagnéticas

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right)$$

también se pueden incluir con un potencial U que depende de las velocidades. Este potencial es

$$U = q\Phi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Donde \mathbf{A} es el vector potencial. Es fácil darse cuenta que con este potencial las trayectorias también satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange con $\mathcal{L} = T - U$, ya que la fuerza satisface

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

las cuales se pueden incluir trivialmente en la ecuación de Euler-Lagrange.

3.3. Fuerzas generalizadas en el principio de Hámilton

Usaremos el principio de Hámilton, pero asumiendo restricciones mas generales, para obtener las ecuaciones de movimiento. Que dice el principio de Hámilton para las restricciones? De nuevo tenemos n variables “normales” $\{x_1, \dots, x_n\}$ que no son independientes. Tomamos restricciones del tipo

$$\sum_{i=1}^n a_{j,i} dx_i + a_{j,t} dt = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

en el caso que los coeficientes se derivan de una función

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial g_j}{\partial t} dt = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

obtenemos el caso de las restricciones holonomicas. En este caso, un poco más general, también estamos interesados en situaciones donde la restricción diferencial no se puede integrar a una restricción holonomica. El principio de Hámilton dice que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$$

Si usamos variaciones $x_i + \varepsilon h_i$ en tiempo constante, tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}_i} \right] h_i = 0$$

El único problema es que las variaciones h_i no son independientes. En general solo $n-m$ de ellas son independientes. Usaremos las restricciones para encontrar las variaciones independientes. Las restricciones satisfacen

$$\lambda_j \sum_{i=1}^n a_{j,i} h_i = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

ya que son efectuadas en tiempo constante. Podemos sumarle este set de $n-m$ ecuaciones a la ecuación de arriba para obtener el principio variacional

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} \right] h_i = 0$$

Acordémonos que solo $n-m$ de estas variaciones son independientes, digamos las primeras $n-m$ de ellas, mientras que las m constantes λ_j son arbitrarias (pero dependen del tiempo y las variables r). Podemos elegir los m coeficientes de Lagrange λ_j de forma que

$$\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} = 0 \quad i = n - m + 1, \dots, n$$

con lo cual podemos usar el teorema del Capitulo 1 para los restantes h_i $i=1, \dots, n-m$ variaciones las cuales si son independientes. Con lo cual tenemos

$$\mathcal{L}_{x_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}_i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} \quad i = 1, \dots, n$$

y requerimos las relaciones de restricción para completar el set de $n+m$ ecuaciones necesarias para las $n+m$ variables.

$$\sum_{i=1}^n a_{j,i} \dot{x}_i + a_{j,t} = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

De alguna forma hemos determinado mas información de con la que empezamos. Que significado tienen los m coeficientes de Lagrange, λ_j ? Para responder esta pregunta hacemos dos observaciones. Primero, la ecuación resultante de Euler-Lagrange es muy parecida a la ecuación de Euler Lagrange que derivamos del principio de Newton, si hacemos la relación

$$Q'_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} \quad i = 1, \dots, n$$

De forma que están relacionados con fuerzas. Segundo nos damos cuenta que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} h_i \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j a_{j,i} h_i \right] = \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{i=1}^n a_{j,i} h_i = 0$$

Por lo tanto estas fuerzas no hace trabajo virtual. Entonces asociamos estas n fuerzas generalizadas con las fuerzas que mantienen las restricciones.

Ejemplo: Encuentre las ecuaciones del movimiento de un anillo rodando sin resbalar en un plano inclinado y las fuerzas de restricción. Nuevamente, la ecuación de restricción es

$$x = R\theta$$

Podríamos despejar una de estas variables en el Lagrangiano y encontrar las ecuaciones de movimiento. Pero usemos el método de coeficientes de Lagrange para resolver este problema. Por lo tanto tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M\dot{x}) - Mg \sin \alpha &= \lambda(1) \\ \frac{d}{dt} (M\dot{\theta}) &= \lambda(-R) \\ \dot{x} - R\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{Mg \sin \alpha}{2} \\ \ddot{x} &= \frac{g \sin \alpha}{2} \\ \ddot{\theta} &= \frac{g \sin \alpha}{R2} \end{aligned}$$

y obtenemos el mismo resultado que en el Ejemplo (7), pero además podemos reconstruir las fuerzas de restricción

$$\begin{aligned} F_x &= \lambda(1) = -\frac{Mg \sin \alpha}{2} \\ F_\theta &= \lambda(-R) = \frac{RMg \sin \alpha}{2} \end{aligned}$$

El primero es una fuerza y el segundo es un torque, necesarios para mantener al anillo sin resbalar.

Ejemplo: Encuentre las ecuaciones del movimiento para el péndulo de largo r y encuentre las fuerzas de restricción. El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2) - mg(r - x_2)$$

mientras la restricción es

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

Podríamos despejar una de estas variables en el Lagrangiano y encontrar las ecuaciones de movimiento. Pero usemos el método de coeficientes de Lagrange para resolver este problema. Por lo tanto tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\lambda}{m} (x_1) \\ \ddot{x}_2 &= gx_2 + \frac{\lambda}{m} (x_2) \\ x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos que

$$\lambda = -\frac{mg \cos \theta}{2r} - m \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{mg \cos \theta}{r} + C = -\frac{T}{r} + C$$

donde hemos usado conservación de la energía. Las fuerzas de restricción son (aparte de una constante)

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= \lambda(x_1) = -T \sin \theta \\ F_{x_2} &= \lambda(x_2) = -T \cos \theta \end{aligned}$$

3.3.1. Fuerzas generalizadas

Para fuerzas conservativas y no conservativas (incluso para fuerzas de restricción que ejercen trabajo sobre el sistema) tenemos para $\mathcal{L} = T - U$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}_i} - \mathcal{L}_{x_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n - m$$

para lo cual tenemos que

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n - m$$

incluyen las fuerzas no conservativas (y posiblemente las fuerzas de restricción que ejercen trabajo sobre el sistema). En general es difícil escribir la ecuación de movimiento y el Lagrangiano para sistemas con fuerzas no-conservativas y para fuerzas de restricción que ejercen trabajo.

Con la definición de momento generalizado tenemos que

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + Q_j \quad j = 1, \dots, n - m$$

la cual se parece mucho a la ecuación de Newton para variables "normales", pero en termino de variables generalizadas.

4. El Hamiltoniano y el Momento Canónico

Hasta ahora hemos visto que el Lagrangiano da origen a n ecuaciones de 2do orden. Ahora veremos como construir $2n$ ecuaciones de 1er orden usando la función Hamiltoniana en vez del Lagrangiano. El momento canónico

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i}$$

evoluciona como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i}$$

en forma muy similar a las ecuaciones de Newton. Supongamos que de esta ecuación se puede resolver

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

Hagamos una transformación de coordenadas, llamada una transformación de Legendre, en la cual generamos una nueva función que depende de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$,

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathcal{L}[t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})]$$

Esta función varia como función de $(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

y por su definición

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

por lo cual tenemos que

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

La función $\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ es denominado el Hamiltoniano. Es importante notar que en esta representación tenemos $2n$ ecuaciones de primer orden, por supuesto aun necesitamos $2n$ condiciones iniciales para integrar nuestro sistema. Ahora podemos definir canónicamente un espacio de fase con coordenadas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Estas ecuaciones se denomina las ecuaciones canónicas de movimiento, y las variables (\mathbf{q}, \mathbf{p}) las variables canónicas. También podemos ver que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

y por lo tanto \mathcal{H} se conserva si \mathcal{H} no depende explícitamente de t o si \mathcal{L} no depende explícitamente de t .

Ejemplo: Encontrar las ecuaciones de movimiento de un anillo rodando sin resbalarse en un plano inclinado. El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 \right) - (-M g x \sin \alpha) = M \dot{x}^2 + M g x \sin \alpha$$

El momento canónico es

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2M \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{2M}$$

Podemos resolver \dot{x} como función de p y finalmente escribir el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = p_x \dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{2M} - \frac{p_x^2}{4M} - M g x \sin \alpha = \frac{p_x^2}{4M} - M g x \sin \alpha$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{2M} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = M g \sin \alpha \end{aligned}$$

con lo que obtenemos la misma ecuación de movimiento para la aceleración en x .

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\dot{p}_x}{2M} = \frac{g \sin \alpha}{2}$$

No todos los sistemas dan resultados tan triviales, ya que cuando hay restricciones la dependencia en las coordenadas y los momentos asociados es más complicada.

Ejemplo: Para el caso electromagnético tenemos que

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - q\Phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

para lo cual podemos definir

$$\begin{aligned} p_i &= \mathcal{L}_{x_i} = m \dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i \\ \mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L} = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2m} + q\Phi \end{aligned}$$

En la física moderna las teorías generalmente parten de un Hamiltoniano, ya que es la formulación canónica la que describe un espacio de fase donde es posible trabajar.

4.1. Conservación de energía

4.1.1. Transformación a variables generalizadas

Todos los principios de conservación que estudiamos para calculo de variaciones se usan acá. Diferentes Lagrangianos permiten ciertas constantes de movimientos. Por ejemplo, si el Lagrangiano no depende de alguna variable en forma explicita, pero si de su velocidad asociada, tenemos que

$$\mathcal{L}_{\dot{q}_i} = const$$

y por lo tanto el momento canónico

$$p_i = \mathcal{L}_{\dot{q}_i} = const$$

para la variable cíclica q_i . Es posible eliminar del Lagrangiano todas las variables cíclicas de un problema dejando un problema solo en termino de las variables generalizadas restantes.

Además, es interesante ver que \mathcal{H} es muchas situaciones esta relacionado con la energía. Supongamos que estamos en el espacio sin fuerzas, entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$$

con $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. En general tenemos tres preguntas que hacernos

1. **Cuando el Hamiltoniano \mathbf{H} es constante?:** \mathbf{H} es constante cuando \mathbf{H} no depende explícitamente del tiempo o cuando \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

2. **Cuando la energía \mathbf{E} es constante?:** La energía es constante cuando cuando las fuerzas no-conservativas no hacen trabajo

$$\frac{d}{dt} [T + U] = \mathbf{F}^{NC} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

esto se puede relajar un poco para incluir algunas situaciones especiales

3. **Cuando $\mathbf{H}=\mathbf{E}=\mathbf{T}+\mathbf{U}$?:** Dado que la transformación a variables generalizadas es

$$T(q_i, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 =$$

$$a + \sum_{j=1}^{n-m} b_j(q_i, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_{n-1}) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} c_{jk}(q_i, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_{n-1}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

vemos que T es a lo más cuadrática en las derivadas temporales de las variables generalizadas. Vemos que $\mathcal{H} = T + U = E$ cuando

- a) la transformación a las variables generalizadas no dependen del tiempo $\mathbf{x}(\mathbf{q})$
- b) U no depende de las velocidades

La última relación es necesaria para que no aparezca un termino extra en

$$p_i = \mathcal{L}_{\dot{q}_i}$$

Problema: Tomemos una masa que esta conectada a un soporte rígido a través de un resorte de constante k como se muestra en Fig. 4.1.1. Este soporte se mueve a velocidad constante.

Es mas o menos obvio que podríamos hacer una transformación Galileana al sistema en reposo con el soporte del reposo. En este sistema, tendríamos la conservación de la energía mecánica

$$E_o = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Veamos como se ve esto en el sistema del laboratorio. Aquí podemos describir la posición de la partícula

$$x_1(t) = v_o t + x(t)$$

en termino de la variable generalizada $x(t)$. En este sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x} + v_o)^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

y la ecuación de movimiento es

$$m \ddot{x} = -kx$$

Si multiplicamos por \dot{x} podemos encontrar inmediatamente que

$$E_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

es una constante de movimiento. El momento canónico es

$$p = \mathcal{L}_{\dot{x}} = m(\dot{x} + v_o) \quad \rightarrow \quad \dot{x} = v_o + \frac{p}{m}$$

y por lo tanto el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{x}p - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + pv_o \end{aligned}$$

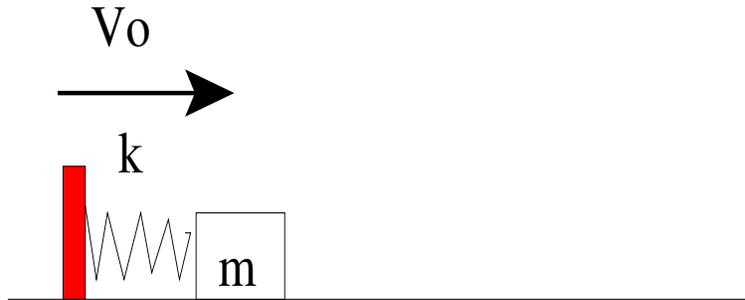
es una constante de movimiento, y es equivalente a E_1 . La energía

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x} + v_o)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

es diferente a \mathcal{H} ya que la transformación a las variables generalizadas dependen del tiempo. Podemos ver que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}mv_o\ddot{x} \neq 0$$

por lo tanto la energía E no es una constante de movimiento.



5. Pequeñas oscilaciones

Supongamos que logramos encontrar la ecuación de movimiento finalmente. Generalmente podemos encontrar una situación en la cual tenemos

$$\ddot{x}_i = \dot{x}_i = 0$$

Llamaremos a esto un estado de estacionario. La pregunta que resulta relevante entonces es preguntar por la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Asumamos pequeñas oscilaciones de la forma

$$x_i = x_{i,0} + A_i e^{i\omega t} \quad |A_i| \ll 1$$

y linealizamos las ecuaciones de movimiento cerca de $x_{i,0}$. Esta expansión en modos de Fourier es factible ya que el sistema es lineal. En general vamos a tener ecuaciones de la forma

$$a_{i,j}\ddot{x}_j + b_{i,j}\dot{x}_j + c_{i,j}(x_j - x_{j,0}) = 0$$

lo que implica que

$$-\omega^2 a_{i,j}A_j + i\omega b_{i,j}A_j + c_{i,j}A_j = 0$$

tenemos en termino de matrices \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y el vector \mathbf{A}

$$(-\omega^2 \mathbf{a} + i\omega \mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{A} = 0$$

si la matriz \mathbf{a} tiene inverso podemos encontrar las frecuencias posibles a través del determinante de

$$\text{Det} [-\omega^2 \mathbf{a} + i\omega \mathbf{b} + \mathbf{c}] = 0$$

Las frecuencias ω que resuelven este determinante son las frecuencias posibles de oscilación del sistema. Si es necesario, podemos encontrar los modos de oscilación A_j para cada una de las frecuencias posibles. Ya hicimos un ejemplo con el problema del péndulo simple en el cual expandimos cerca del punto θ_0 . En general el problema es un poco mas complicado ya que incluye mas de una variable y determinantes complejos.

Ejemplo: Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones de un anillo que se mueve en un alambre con forma $y = ax^2$.

En este caso podemos utilizar la variable x como generalizada, para lo cual podemos escribir

$$\dot{y} = 2ax\dot{x}$$

con lo cual el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] - mgy = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2] - mgax^2$$

con lo cual la ecuaciones de movimiento es

$$\frac{d}{dx} [m\dot{x} (1 + 4a^2x^2)] = m4a^2x\dot{x}^2 - 2mgax$$

o

$$m\ddot{x} (1 + 4a^2x^2) = -4ma^2x\dot{x}^2 - 2mgax$$

El punto de equilibrio se puede encontrar fácilmente

$$x = 0$$

Por lo tanto una pequeña perturbación

$$x = 0 + \eta$$

da

$$\ddot{\eta} = -2ga\eta$$

y la frecuencia de pequeñas oscilaciones cercanas al punto de equilibrio es

$$\omega^2 = 2ga$$

Notemos que en este caso la energía es igual al Hamiltoniano y por lo tanto

$$p = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2)$$

y el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{p^2 + 2agm^2x^2(1 + 4a^2x^2)}{2m + 8a^2mx^2}$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m + 4a^2mx^2} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{2ax}{m(1 + 4a^2x^2)^2} [gm^2 - 2ap^2 + 8a^2gm^2x^2 + 16a^4gm^2x^4] \end{aligned}$$

la cual se ve puede resolver numéricamente si es necesario.

Ejemplo: Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones de un sistema compuesto de un péndulo colgado de un soporte que esta conectado a un resorte como se muestra en la Fig. 5

Tenemos que escribir las ecuaciones de movimiento en termino de variables generalizadas, las que elegimos como

$$\begin{aligned} x_1 &= x + L \sin \theta & \rightarrow & \quad \dot{x}_1 = \dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta \\ y_1 &= -L \cos \theta & \rightarrow & \quad \dot{y}_1 = L\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto el Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] - mgy_1 - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta] + mgL \cos \theta - \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos[\theta] - \dot{\theta}^2 mL \sin \theta &= -kx \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} \cos \theta &= -mLg \sin \theta \end{aligned}$$

Las situaciones de equilibrio son

$$\theta = n\pi \quad x = 0$$

Para el caso $\theta_o = 0$ podemos expandir para obtener

$$m\ddot{\eta}_x + mL\ddot{\eta}_\theta = -k\eta_x$$

$$mL^2\ddot{\eta}_\theta + mL\ddot{\eta}_x = -mgL\eta_\theta$$

Asumamos una perturbación $\eta_x = \bar{x}e^{i\omega t}$ y $\eta_\theta = \bar{\theta}e^{i\omega t}$, lo que nos da

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & -mL^2\omega^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Las soluciones son

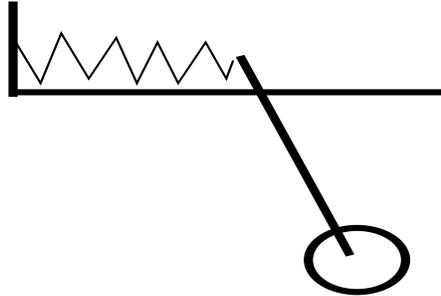
$$\omega^2 = \frac{gk}{gm + kL}$$

Lo que demuestra que hay un solo modo, y no dos como uno esperaría. Esto es consistente con las ecuaciones de arriba, ya que tenemos la restricción

$$-k\eta_x + mgL\eta_\theta = 0$$

El modo de oscilación es

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_x \\ \bar{\eta}_\theta \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + g^2m^2}} \begin{bmatrix} gm \\ k \end{bmatrix}$$



Ejemplo: Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones de un sistema compuesto de un péndulo colgado de una masa M que esta conectado a un resorte.

El movimiento de la masa M se puede describir

$$x_2 = x \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}$$

$$y_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{y}_1 = 0$$

El Lagrangiano es ahora

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2} [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] + \frac{M}{2} [\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2] - mgy_1 - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta] + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgL \cos \theta - \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos[\theta] - \dot{\theta}^2 mL \sin \theta &= -kx \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} \cos \theta &= -mLg \sin \theta\end{aligned}$$

Las situaciones de equilibrio son nuevamente

$$\theta = n\pi \quad x = 0$$

Para el equilibrio $x_o = 0$ y $\theta_o = 0$ podemos expandir para obtener

$$\begin{aligned}(m + M)\ddot{\eta}_x + mL\ddot{\eta}_\theta &= -k\eta_x \\ mL^2\ddot{\eta}_\theta + mL\ddot{\eta}_x &= -mgL\eta_\theta\end{aligned}$$

Asumamos una perturbación $\eta_x = \bar{x}e^{i\omega t}$ y $\eta_\theta = \bar{\theta}e^{i\omega t}$, lo que nos da

$$\begin{bmatrix} -(m + M)\omega^2 + k & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & -mL^2\omega^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Renormalizando el tiempo como $\tau = \sqrt{k/mt}$, podemos re-escribir esta matriz como

$$\begin{bmatrix} -(1 + \beta)\bar{\omega}^2 + 1 & -\bar{\omega}^2 \\ -\bar{\omega}^2 & -\bar{\omega}^2 + \omega_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ L\bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

donde $\beta = m/M$, $\bar{\omega}^2 = \omega^2 m/k$ y $\omega_o^2 = gm/kL$. Las soluciones son

$$\bar{\omega}_\pm^2 = \frac{1}{2b} \left(1 + (1 + \beta)\omega_o^2 \pm \sqrt{(1 + (1 + \beta)\omega_o^2)^2 - 4\beta\omega_o^2} \right)$$

En forma vectorial definimos la perturbación como

$$\boldsymbol{\eta}_\pm e^{i\bar{\omega}_\pm \tau}$$

donde los dos modos de oscilación son

$$\boldsymbol{\eta}_\pm = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ L\bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_o^2} \left(1 - (1 + \beta)\omega_o^2 \pm \sqrt{(1 + (1 + \beta)\omega_o^2)^2 - 4\beta\omega_o^2} \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

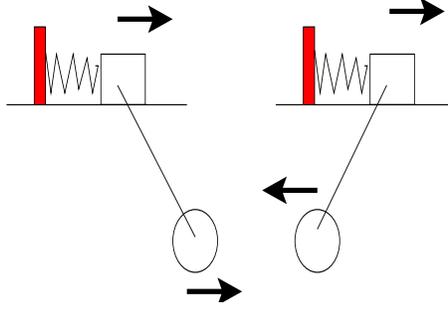
Para el caso $\beta = 2$ y $\omega_o^2 = 1$, tenemos

$$\bar{\omega}_{\pm}^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y los modos

$$\boldsymbol{\eta}_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \mp \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Gráficamente estos modos se pueden describir en la Fig. 5.



La solución general se puede construir como

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ L\theta(t) \end{bmatrix} = (C_{+,+}e^{i\bar{\omega}_+\tau} + C_{+,-}e^{-i\bar{\omega}_+\tau}) \boldsymbol{\eta}_+ + (C_{-,+}e^{i\bar{\omega}_-\tau} + C_{+,-}e^{-i\bar{\omega}_-\tau}) \boldsymbol{\eta}_-$$

Para el caso $\beta = 2$ y $\omega_o^2 = 1$, asumiendo $x'(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 4x(t) &= ((2 + \sqrt{2})x_o + \sqrt{2}L\theta_o) \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\tau\right) \\ &- ((2 - \sqrt{2})x_o + \sqrt{2}L\theta_o) \cos\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\tau\right) \end{aligned}$$

y para la variable angular

$$\begin{aligned} 4L\theta(t) &= (\sqrt{2}x_o - (-2 + \sqrt{2})L\theta_o) \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\tau\right) \\ &+ (-\sqrt{2}x_o + (2 + \sqrt{2})L\theta_o) \cos\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\tau\right) \end{aligned}$$

donde $x(0) = x_o$ y $\theta(0) = \theta_o$.

6. Paso al continuo

Supongamos que tenemos un gran número de resortes conectados como en la Fig. 6. El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i m_n \dot{\eta}_n^2 - \frac{1}{2} \sum_i k_n (\eta_{n+1} - \eta_n)^2$$

y la ecuación de movimiento es por lo tanto

$$m\ddot{\eta}_n - k [\eta_{n+1} - 2\eta_n + \eta_{n-1}] = 0$$

Las condiciones de borde tiene que ser las apropiadas. Notemos que podríamos pasar al continuo tomando la separación entre los resortes como a (con $a \rightarrow 0$ y $dx = adn$)

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{n+1} - \eta_n}{a} &\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\eta_{n+1} - 2\eta_n + \eta_{n-1}}{a^2} &\rightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ \ddot{\eta}_n &\rightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento nos da

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

con $Y = ka$ como el modulo de Young y $\mu = m/a$ con la densidad de mas lineal. También podemos estudiar este problema desde el Lagrangiano ya que lo podemos escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \left[\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\eta_t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{\eta_x} = 0$$

lo que da

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

como antes. Si μ y Y dependen explícitamente de la posiciones, entonces hay que tener cuidado con las ecuaciones, y la formulación continua es mas apropiada. Esta ecuación de onda nos describe el movimiento de perturbaciones en este sistema, que se puede utilizar por ejemplo para describir materiales.

Notemos que tenemos que formular condiciones de borde. Si el ultimo resorte esta pagado a una muralla, entonces

$$\eta_{N+1} = 0 \qquad \eta(L) = 0$$

Si uno de los bordes es libre, en el sentido que solo interactúa con la masa hacia el interior del sistema, tenemos

$$m\ddot{\eta}_n - k[-\eta_n + \eta_{n-1}] = 0$$

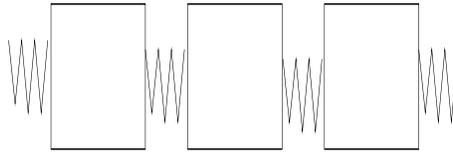
lo que en el paso al continuo significa que

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + Y \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

en el borde. Por el otro lado, la condición de borde natural que nos describe el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\eta_t} + \mathcal{L}_{\eta_x} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} - Y \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

que equivale a un frente de onda que sale hacia la derecha. Esta los que llamaremos **condiciones de salida** que son muy útiles cuando no queremos reflexión del borde. Osea todo lo que llega al borde desde el interior es forzado a salir sin reflejar algo hacia el interior. La forma de implementar esto numéricamente es usando características en el borde.



6.1. Solución numérica de la Ecuación de Ondas

La solución numérica de la ecuación de ondas supone usar

$$\begin{aligned} f_x(x, t) &= \frac{f(x + dx, t) - f(x - dx, t)}{2dx} + O(dx^3) \\ f_{xx}(x, t) &= \frac{f(x + dx, t) - 2f(x, t) + f(x - dx, t)}{dx^2} + O(dx^3) \\ f_t(x, t) &= \frac{f(x, t + dt) - f(x, t - dt)}{2dt} + O(dt^3) \\ f_{tt}(x, t) &= \frac{f(x, t + dt) - 2f(x, t) + f(x, t - dt)}{dt^2} + O(dt^3) \end{aligned}$$

En una dimensión, podemos estimar en un punto de red (i, n) , con $x = i\Delta x$ como el elemento espacial, y $t = n\Delta t$ como la variable tiempo, tenemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi f(x, t)$$

lo que al discretizar da

$$\psi_i^{n+1} = 2\psi_i^n - \psi_i^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (\psi_{i+1}^n - 2\psi_i^n + \psi_{i-1}^n) + c^2 \Delta t f_i^n$$

Se debe tener cuidado con la especificación de las condiciones de borde. Para que la ecuación sea numéricamente estable, es importante considerar cierta relación entre Δx y Δt , para la ecuación de ondas sin fuente.

Comenzamos con una perturbación de la forma

$$\left. \begin{aligned} f_j^n &= M^n e^{ikj\Delta x} \\ r &= \frac{c\Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \rightarrow M^2 = 2M - 1 + r^2 2M(1 + \cos k\Delta x)$$

Con $r \leq 1$, la ecuación de arriba satisface $|M| \leq 1$ para todos los valores de k , por lo tanto, la solución es estable. Esto tiene sentido, ya que esto significa que debe calcular con más rapidez que la propagación de la onda. No nos podemos mover delante de la onda.

6.2. Solución numérica de la propagación de frentes

La ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U(x, t) \frac{\partial A}{\partial x} = g(x, t)$$

es una de las ecuaciones más complicadas en la física, pero al mismo tiempo es la más común. Puede ser resuelta por el método de las características definidas por la curva

$$\begin{aligned} \frac{dr(\lambda)}{dt} &= U(r(\lambda), \tau(\lambda)) \\ \frac{d\tau(\lambda)}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

de esto obtenemos que

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A(r(\lambda), \tau(\lambda)) \\ \frac{dA(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{\partial A}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\lambda} = g(r(\lambda), \tau(\lambda)) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que queremos integrar ambas ecuaciones hacia adelante en t , desde t hasta $t + \Delta t$. Entonces integraremos hacia adelante en el tiempo cada punto x en la red a una posición.

$$x_i(t + \Delta t) = x_i + U(x_i, t)\Delta t$$

$$A[x_i(t + \Delta t), t + \Delta t] = A[x_i, t] + g[x_i t]\Delta t$$

Notemos que fuimos desde una uniformemente mostrada red en t , a saber la x_i , a una red que no es más uniformemente mostrada, a saber la $x_i(t + \Delta t)$. Para volver a una red uniformemente mostrada, debemos interpolar, para lo cual podemos usar los tres puntos más cercanos, a saber los que están en

$$x_{i+1}(t + \Delta t), x_i(t + \Delta t), x_{i-1}(t + \Delta t)$$

Hacer la interpolación es fácil ahora. Hemos logrado que g "conveccione" con una velocidad U , y entonces hemos obtenido A en un tiempo posterior. Este método funciona bien si existe un $g[x]$ tipo difusivo.

En el caso que tenemos pura convección nuestro método no funciona bien si en alguna parte $U = 0$, y en este caso se sugiere utilizar un método de característica hacia atrás

$$x_i = \bar{x}_i(t) + U(\bar{x}_i, t)\Delta t$$

$$A[x_i(t + \Delta t), t + \Delta t] = A[\bar{x}_i, t] + g[\bar{x}_i t]\Delta t$$

lo que implica que necesitamos interpolar hacia atrás para encontrar $\bar{x}_i(t)$, que generalmente se hace por iteración

$$\bar{x}_i^{(n+1)}(t) = x_i - U(\bar{x}_i^{(n)}, t)\Delta t$$

partiendo de

$$\bar{x}_i^{(1)}(t) = x_i - U(x_i, t)\Delta t$$

Este es el método mas utilizado en grandes simulaciones, con 2 o 3 iteraciones, como el clima.