Capítulo 4: Cuerpos Rígidos

Un problema muy interesante es el problema de los **cuerpos rígidos** en los cuales tenemos un numero muy grande de restricciones (infinito en general) que dan origen a solo **6 variables generalizadas**.

1. Si tenemos $N_p = 1$ partículas, requerimos de $D = N_p \times 3 = 3$ variables independientes
2. Si tenemos $N_p = 2$ partículas, tenemos $N_p \times 3 = 6$ variables que describen los N_p cuerpos. Pero tenemos $R = 1$ restricciones, por lo tanto el sistema requiere de $N_v = N_p \times 3 - R = 5$ variables independientes
3. Si tenemos $N_p = 3$ partículas, tenemos $N_p \times 3 = 9$ variables que describen los N_p cuerpos. Pero tenemos $R = 3$ restricciones, por lo tanto el sistema requiere de $N_v = N_p \times 3 - R = 6$ variables independientes
4. Si tenemos $N_p = 4$ partículas, tenemos $N_p \times 3 = 12$ variables que describen los N_p cuerpos. Pero tenemos $R = 3+3$ restricciones, por lo tanto el sistema requiere de $N_v = N_p \times 3 - R = 6$ variables independientes
5. Si tenemos N_p partículas, tenemos $N_p \times 3$ variables que describen los N_p cuerpos. Pero tenemos $R = 1+2+3-(N_p-4)\times 3$ restricciones, por lo tanto el sistema requiere de $N_v = N_p \times 3 - R = 6$ variables independientes

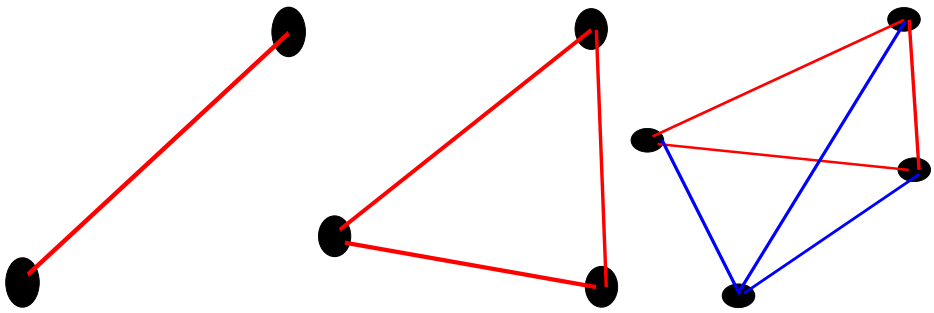


Figura 1: Restricciones que definir un cuerpo rígido

Estas fuerzas de restricción no hacen trabajo virtual ya que no pueden generar desplazamientos.

Índice

1. Descripción de un cuerpo rígido **3**

2. El grupo de rotaciones: eje fijo **4**

3. Sistema de coordenadas del cuerpo rígido: eje móvil **6**
3.1. Energía Cinética 8
3.2. Momento angular 9
3.3. Propiedades del momento de inercia 10
3.3.1. Translación de coordenadas, eje paralelo 10
3.3.2. Rotación a los ejes principales de Inercia (EP) 11

4. Dinámica: ecuaciones de Euler **14**
4.1. Trompo simétrico: 16
4.2. Trompo asimétrico: 19

5. Método del Lagrangiano **22**
5.1. Otra parametrización de la rotación: ángulos de Euler 22
5.2. La energía cinética 24
5.3. Caso trompo simétrico bajo la fuerza de gravedad y con punto fijo 25

6. Precesión de cargas en un campo magnético **27**

7. Movimiento Planetario **28**
7.1. Precesión caótica de satélites y planetas 29
7.2. Caso $M \sim m$ 29

8. Apéndice A: Convención de Einstein **30**

1. Descripción de un cuerpo rígido

Definamos 2 sistemas de coordenadas: un sistema inercial K, donde las ecuaciones de Newton son validas; y un sistema $\bar{K}(t)$, en general no-inercial, fijo en el cuerpo rígido. La posición de los elementos del cuerpo rígido entre los dos sistemas de coordenadas se relaciona con

$$\mathbf{r}_\alpha(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{A}^T(t)\bar{\mathbf{r}}_\alpha \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_\alpha(t) = \mathbf{V}(t) + \frac{d\mathbf{A}(t)^T}{dt}\bar{\mathbf{r}}_\alpha$$

Notemos que $\bar{\mathbf{r}}_\alpha$ no depende del tiempo, ya que esta fijo en el sistema de coordenadas del cuerpo. Toda la variación en el tiempo esta incluida en la matriz $\mathbf{A}(t)$ que representa la rotación del sistema del cuerpo con respecto a su origen.

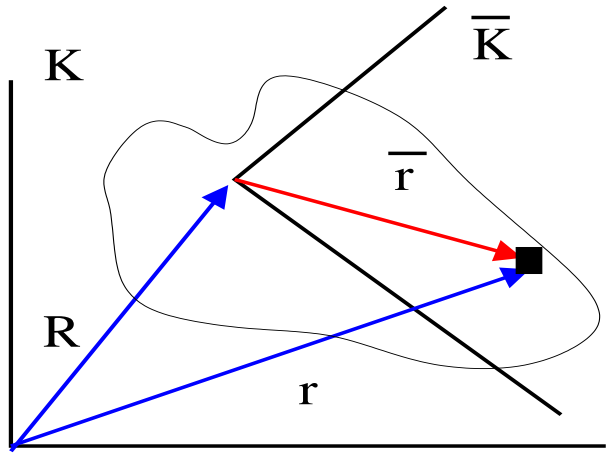


Figura 2: Transformación de coordenadas

Por un tiempo mantendremos el problema bastante general. Hay dos orígenes de coordenadas (que describen $\mathbf{R}$ y $\mathbf{V}$) en los cuales estamos interesados, ya que en estos dos sistemas de coordenadas se puede separar el movimiento de traslación y el movimiento de rotación.

- Punto en el cuerpo que no se mueve, osea, $\mathbf{V} = 0$
- El centro de masa del cuerpo, osea, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{CM}$.

Para estos dos sistemas de coordenadas se puede separar el movimiento de traslación y el movimiento de rotación. La dinámica de este cuerpo requiere 6 variables, 3 que determinan el movimiento del origen del sistema de coordenadas del cuerpo y 3 ángulos independientes que orientan al cuerpo con respecto al origen del sistema de coordenadas. Estos 3 ángulos independientes se pueden tomar como los ángulos de Euler.

El caso de la energía cinética la veremos con detalle en las próximas secciones, ya que la rotación al sistema no-inercial requiere un poco de análisis. El caso de la energía potencial es simple en este caso ya que las fuerzas entre partículas no ejercen ningún trabajo, mientras las fuerzas externas si

pueden ejercer trabajo. Por ejemplo, si un cuerpo esta en un campo externo gravitacional constante, tenemos,

$$U = \sum_\alpha m_\alpha g z_\alpha = g \sum_\alpha m_\alpha z_\alpha = gMZ_{CM}$$

En este caso el potencial solo depende de las variables del centro de masa.

2. El grupo de rotaciones: eje fijo

La rotación de un sistema de coordenadas con respecto a otro sistema de coordenadas $\bar{K}(t)$, pero con el mismo origen, por un ángulo θ alrededor de la dirección $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se puede escribir como la transformación lineal

$$\bar{\mathbf{r}}_\alpha = \boldsymbol{A}(\theta)\mathbf{r}_\alpha$$

que relaciona los componentes de los vectores en los dos sistemas de referencia. Esta transformación relaciona los componentes del mismo punto en los dos sistemas de referencia. En principio, esta transformación puede transformar cualquier vector entre los dos sistemas de referencia. Hay muchas parametrizaciones de esta transformación que depende en general de 3 parámetros. Primero, vamos a requerir que el nuevo sistema de coordenadas (pura rotación) sea orto-normal, conservando el tamaño de los vectores $\bar{\mathbf{r}}^T\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$.

$$\bar{\mathbf{r}}^T\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)\mathbf{r}$$

lo que nos da

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 1$$

lo que implica que la transformación inversa es $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Esto también implica que el determinante de $|\mathbf{A}| = 1$ o -1. El valor del determinante -1 no es físico ya que representa una reflexión, lo cual no se puede realizar a través de rotaciones de un cuerpo rígido (en lenguaje topológico una reflexión no es continuamente deformable a la identidad). Con esto definimos el grupo

$$SO(3) = \{\mathbf{A} : R^3 \to R^3 \quad lineal \quad | \quad det\mathbf{A} = +1, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = 1\}$$

Como ejemplo veamos la rotación en el eje z. Definiendo la matriz

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$\exp\left(-\mathbf{J}_3\theta\right) = \left(1 - \theta\mathbf{J}_3 + \frac{\theta^2}{2}\mathbf{J}_3^2 + ...\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas general aun, definimos el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ como el eje de rotación arbitrario. La acción de $\boldsymbol{A}(\theta)$ se puede escribir en termino del vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ descomponiendo la rotación en los tres vectores $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times (\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r})$ que son ortogonales entre ellos.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{r} &= \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r} \sin\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}\right)\cos\theta \\ &= \mathbf{r}\, cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r} \sin\theta + (1 - \cos\theta)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Es fácil probar que esta transformación pertenece a $SO(3)$, y además, se puede probar que todas las transformaciones en $SO(3)$ pueden ser escritas de esta forma. Basta con solo mostrarlo para las bases respectivas.

En forma infinitesimal, $\theta = \varepsilon << 1$, podemos escribir esta transformación como

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}\, \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Este resultado sera muy útil en la próxima sección cuando dejemos que el eje de rotación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ cambie con el tiempo. Por ahora podemos re-escribir esta relación en forma matricial

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \varepsilon \left[\hat{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \hat{\theta}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{\theta}_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \mathbf{r}$$

Definimos entonces los generadores de las rotaciones $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z]$ como las tres matrices descritas arriba. Con estas definiciones tenemos

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \varepsilon \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \cdot \mathbf{J}\mathbf{r} + O(\varepsilon^2)$$

Si aplicamos esta rotación infinitesimal n veces, **asumiendo que tenemos la dirección del eje de rotación $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ fijo**, con $\varepsilon = \theta/n$ logramos

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\theta}{n}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{J}\right)^n \mathbf{r} = exp(-\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{J})\mathbf{r}$$

Por lo tanto los generadores infinitesimales definen la transformación entre los sistemas de coordenadas. Es interesante darse cuenta que los generadores $\mathbf{J}_i$ obedecen una álgebra de Lie donde el conmutador

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = \mathbf{J}_i\mathbf{J}_j - \mathbf{J}_j\mathbf{J}_i = \varepsilon_{i,j,k}\mathbf{J}_k$$

La rotación inversa es

$$\mathbf{A}^T = \exp(+\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J})$$

donde $\boldsymbol{\theta} = \theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Notemos que si definimos

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{r} &= -\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \cdot \mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{r} = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\mathbf{r}) \\ \frac{d\mathbf{A}^T}{dt}\bar{\mathbf{r}} &= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \cdot \mathbf{J}\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Veremos que esta relación son aun correctas cuando el eje de rotación cambia.

3. Sistema de coordenadas del cuerpo rígido: eje móvil

El sistema no-inercial $\bar{K}(t)$ esta fijo en un punto del cuerpo pero su orientación cambia, por lo tanto la relación de las coordenadas de los dos sistemas es

$$\mathbf{r}_\alpha(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{A}^T(t)\bar{\mathbf{r}}_\alpha \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_\alpha(t) = \mathbf{V}(t) + \frac{d\mathbf{A}^T(t)}{dt}\bar{\mathbf{r}}_\alpha$$

es importante darse cuenta que $\bar{\mathbf{r}}_\alpha$ no varia en el tiempo.

Asumamos por ahora que $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Podemos adaptar el resultado infinitesimal derivado en la sección anterior, y ver que el cambio producido por un rotación entre el tiempo t y $t + dt$ es

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \times \mathbf{r} + O(d\theta^2)$$

para el caso en que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ cambia en el tiempo. Con la definición

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ esta evaluado en el tiempo $t + dt/2$, podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Este es uno de los resultados mas importantes de este capitulo. Notemos que es precisamente esta definición, lo que hace no trivial el problema de rotaciones, ya que

$$\boldsymbol{\omega} \neq \frac{d(\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt}$$

La igualdad se da solo en el caso en que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ esta fijo en el tiempo .

Esto implica que

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}^T(t)}{dt}\bar{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}})}$$

que es un resultado mas general que el de la sección anterior, porque ahora $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puede cambiar en el tiempo. Notemos que este velocidad angular ω no nos permite construir la matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ ya que $\boldsymbol{\omega}$ cambia de dirección constantemente. Mas adelante, veremos como construir la matriz $\mathbf{A}$ al integrar $\boldsymbol{\omega}$ con los ángulos de Euler.

Para el caso general tenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_\alpha(t) = \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}^T(t)\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)}$$

Es fácil darse cuenta que $\boldsymbol{\omega}$ es universal, ya que no depende de la posición del origen del sistema de coordenadas $\bar{K}(t)$, aunque si depende de su orientación. Tomemos otro origen del sistema de coordenadas del cuerpo definido pero con la misma orientación que $\bar{K}(t)$, por ejemplo

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{a} \qquad \rightarrow \qquad \bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{A}\mathbf{a}$$

El movimiento es entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}\right) \\ &= \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}'\right) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\omega}' &= \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{\omega}$ es universal, no depende de la posición del origen del sistema de coordenadas $\bar{K}(t)$, aunque si depende de su orientación (veremos esto mas adelante). Con esta definición tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} &= -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\mathbf{b}) \\ \dot{\mathbf{A}}^T b &= \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{b}\right) \end{aligned}$$

y podemos también derivar que

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$$

También se da $\mathbf{A}^T\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{A}^T\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Esto describe que la rotación no cambia el componente paralelo al eje de rotación.

También es útil probar que para una rotación

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = Det[\mathbf{A}]\ (\mathbf{Aa})\times(\mathbf{Ab}) = (\mathbf{Aa})\times(\mathbf{Ab})$$

para el grupo de rotaciones que definimos.

3.1. Energía Cinética

La energía cinética descrita en termino de las variables del sistema

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}^T\left(\sum_\alpha m_\alpha\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right) + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

donde hemos asumido una sumatoria implícita para α. En los dos sistemas de coordenadas en los cuales estamos interesados, $\mathbf{V}=0$ o $\mathbf{V}=\mathbf{V}_{CM}$, tenemos que el termino del medio es cero, y claramente la energía cinética se puede separar en translación (centro de masa) y rotación

$$\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{A}^T\left(\sum_\alpha m_\alpha\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)\right) = 0$$

La energía cinética de rotación es entonces

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\boldsymbol{\omega}^2\left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left(\omega^2\bar{r}_\alpha^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\bar{\mathbf{r}}_\alpha)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i,j}\ \omega_i\left[\sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{i,j}\bar{r}_\alpha^2 - \bar{x}_{\alpha,i}\bar{x}_{\alpha,j}\right)\right]\omega_j \\ &= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i,j}\ \omega_i\ \bar{I}_{i,j}\ \omega_j \end{aligned}$$

donde hemos definido que el tensor

$$\boxed{\bar{I}_{i,j} = \sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{i,j}\bar{r}_\alpha^2 - \bar{x}_{\alpha,i}\bar{x}_{\alpha,j}\right)}$$

es el **momento de inercia** en el sistema de referencia $\bar{K}(t)$ fijo con el cuerpo.

Nota: Por ahora usaremos el mismo símbolo para el tensor y su representación en coordenadas cartesianas, pero mas adelantes veremos que estos son objetos diferentes.

En notación tensorial

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}}$$

3.2. Momento angular

El momento angular se describe como

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{r}}_\alpha \\
&= \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{R} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha) \times \left(\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right) \\
&= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \left(\mathbf{A}^T\left[\sum_\alpha m_\alpha \bar{\mathbf{r}}_\alpha\right]\right) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}^T\left[\sum_\alpha m_\alpha \bar{\mathbf{r}}_\alpha\right]\right)\right) + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)
\end{aligned}$$

Nuevamente para los dos sistemas de coordenadas en que estamos interesados tenemos que el momento angular se puede separar en translación (centro de masa) y rotación. El caso $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{0}$ es mas o menos claro, y el caso del centro de masa tenemos que $\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{0}$. Ahora

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{rot} &= \sum_\alpha m_\alpha \left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)\right) \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)^2 - \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)\right] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{A}^T\left[\boldsymbol{\omega}\,\bar{x}_\alpha^2 - \bar{\mathbf{r}}_\alpha\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{r}}_\alpha\right)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathbf{L}_{rot} = \mathbf{A}^T\,\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}}$$

También se puede escribir como

$$\bar{\mathbf{L}}_{rot} = \bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}$$

Es interesante notar que en general el vector de momento angular no es paralelo a la velocidad angular.

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T\,\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{L}} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega})^T(\mathbf{A}\,\mathbf{L}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}
\end{aligned}$$

ya que el producto punto es invariante ante rotaciones.

Llegamos a la siguiente conclusión: el producto de un tensor por un vector da un vector, y el producto de tensor con dos vectores da un escalar.

3.3. Propiedades del momento de inercia

El momento de inercia depende del origen de coordenadas del cuerpo y en la orientación de los ejes. Por lo tanto tenemos aun la libertad de rotar los ejes. Podemos pensar en varias transformaciones (independientes del tiempo) del sistema $\bar{K}(t)$ a un sistema $\bar{\bar{K}}(t)$ cosa que el momento de inercia sea mas simple de calcular.

Es interesante distinguir las propiedades del momento de inercia:

1. Primero, es fácil pasar de la sumatoria al continuo, simplemente hacemos

$$I_{i,j} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{i,j} r_\alpha^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}\right) \quad \rightarrow \quad \int \left(\delta_{i,j} r^2 - r_i r_j\right) \rho(r) d^3 r$$

   o en representación matricial como

$$\mathbf{I} = \int \rho(r) d^3 r \begin{bmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -yx & (x^2+z^2) & -yz \\ -zx & -zy & (x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

2. El momento de inercia es aditivo en la masa, o en la densidad, lo cual implica que el momento de inercia al unir dos cuerpos es igual a la suma de sus componentes.

3. El momento de inercia es un tensor simétrico y real, por lo tanto se puede diagonalizar con una transformación ortogonal $\mathbf{V}\ \epsilon\ O(3)$. Veremos mas sobre esto cuando estudiemos los ejes principales del momento de inercia.

3.3.1. Translación de coordenadas, eje paralelo

Muchas veces queremos calcular el momento de inercia en un sistema de coordenadas, pero queremos trabajar en otro sistema de referencia. Supongamos que deseemos hacer una translación del origen del sistema de coordenadas del cuerpo $\bar{K}(t) \rightarrow \bar{\bar{K}}(t)$

$$\bar{\bar{\mathbf{r}}} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{a}$$

con lo que el momento de inercia nos da

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}_{i,j} &= \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{i,j} \bar{\bar{r}}_\alpha^2 - \bar{\bar{x}}_{\alpha,i} \bar{\bar{x}}_{\alpha,j}\right) = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{i,j} (\bar{\mathbf{r}}_\alpha + \mathbf{a})^2 - (\bar{r}_{\alpha,j} + a_i)(\bar{r}_{\alpha,j} + a_j)\right) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{i,j} \bar{r}_\alpha^2 - \bar{x}_{\alpha,i} \bar{x}_{\alpha,j}\right) + \delta_{i,j} \sum_\alpha m_\alpha (2\bar{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \mathbf{a} + a^2) - \sum_\alpha m_\alpha (\bar{x}_{\alpha,i} a_j + \bar{x}_{\alpha,j} a_i + a_i a_j) \\ &= \bar{I}_{i,j} + M(\delta_{i,j} a^2 - a_i a_j) + \left[2\delta_{i,j} \left(\sum_\alpha m_\alpha \bar{\mathbf{r}}_\alpha\right) \cdot \mathbf{a} - \left(\sum_\alpha m_\alpha \bar{x}_{\alpha,i}\right) a_j + \left(\sum_\alpha m_\alpha \bar{x}_{\alpha,j}\right) a_i\right] \end{aligned}$$

Esta transformación del momento de inercia funciona para cualquier desplazamiento del origen. Pero solo dos sistemas de coordenadas en el cuerpo permiten separar el movimiento de translación y rotación (el centro de masa o punto fijo del cuerpo). En particular si la translación es al centro de masa, tenemos

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\bar{I}}_{i,j} = \bar{I}_{i,j} + M(\delta_{i,j}a^2 - a_i a_j)$$

Este teorema de Steiner, para ejes paralelos, es muy útil al momento de calcular momentos de inercia.

3.3.2. Rotación a los ejes principales de Inercia (EP)

Ya que el tensor $\bar{\mathbf{I}}$ es simétrico y real, osea podemos hacer una transformación extra (independiente del tiempo) de los ejes cosa que en el nuevo sistema de coordenadas $\bar{\bar{K}}(t)$ el tensor es diagonal.

Es importante darse cuenta que esta rotación es independiente del tiempo y es diferente a la rotación $\mathbf{A}$ parametrizada por $\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Además esta transformación aplica también a todos los vectores $\boldsymbol{\omega}$ del sistema $\bar{K}(t) \rightarrow \bar{\bar{K}}(t)$.

Dado que $\bar{\mathbf{I}}$ es simétrico, existe una base tal que

$$\bar{\mathbf{I}}\mathbf{v}_i = \bar{\bar{I}}_i \mathbf{v}_i$$

donde $\bar{\bar{I}}_i$ son los valores propios. Vemos que si formamos la matriz de vectores propios $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, podemos escribir este relación en forma matricial como

$$\bar{\mathbf{I}}\mathbf{V} = \mathbf{V}\bar{\bar{\mathbf{I}}}$$

donde $\bar{\mathbf{I}}$ es la matriz diagonal con los elementos $\bar{\bar{I}}_i$. Calculemos

$$0 = \mathbf{v}_i^T \, \mathbf{I} \, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^T \mathbf{I} \, \mathbf{v}_i = (\bar{\bar{I}}_j - \bar{\bar{I}}_i) \, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$

porque $\bar{\mathbf{I}}$ es simétrico. Por lo tanto si los valores propios son diferentes, entonces la matriz V es ortogonal, y la podemos definir como ortonormal por normalización. Si dos valores propios son iguales, de todas maneras podemos construir dos combinaciones lineales tal que la matriz $\mathbf{V}$ sea ortonormal. El hecho de tener dos valores propios iguales, implica que hay cierta simetría en el sistema. Por lo tanto vemos que es fácil construir esta transformación con $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{1}$. Con esto tenemos

$$\mathbf{V}^T \, \bar{\mathbf{I}} \, \mathbf{V} = \bar{\bar{\mathbf{I}}}$$

La energía cinética entonces se puede re-escribir como

$$2T = \boldsymbol{\omega}^T \, \bar{\mathbf{I}} \, \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \, (\mathbf{V}\mathbf{V}^T) \, \bar{\mathbf{I}} \, (\mathbf{V}\mathbf{V}^T) \, \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{V}^T\boldsymbol{\omega})^T \, \bar{\bar{\mathbf{I}}} \, (\mathbf{V}^\mathbf{T}\boldsymbol{\omega}) = \bar{\boldsymbol{\omega}}^\mathbf{T} \, \bar{\bar{\mathbf{I}}} \, \bar{\boldsymbol{\omega}} = \sum_\mathbf{i} \, \bar{\omega}_\mathbf{i}^\mathbf{2} \, \bar{\bar{\mathbf{I}}}_\mathbf{i}$$

lo que transforma la velocidad angular como

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{V}^T\, \bar{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i \left(\bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{v}_i\right) \mathbf{v}_i$$

lo que es equivalente a proyectar $\boldsymbol{\omega}$ a la nueva base.

Para una matriz simétrica y real siempre es posible hacer esta transformación y encontrar los ejes principales (EP) de inercia. Los valores propios son reales y los vectores son orto-normales. En este sistema de referencia la energía cinética rotacional es

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \bar{\omega}_i^2\, \bar{\bar{I}}_i$$

El momento angular es

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}} = \mathbf{V^T}\, \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{V^T}\, \bar{\mathbf{I}}\, \boldsymbol{\omega} = \left(\mathbf{V^T}\, \bar{\mathbf{I}}\mathbf{V}\right) \left(\mathbf{V^T}\boldsymbol{\omega}\right) = \bar{\bar{\mathbf{I}}}\, \bar{\boldsymbol{\omega}}$$

o en componentes

$$\bar{\bar{L}}_i = \bar{\bar{I}}_i\, \bar{\omega}_i$$

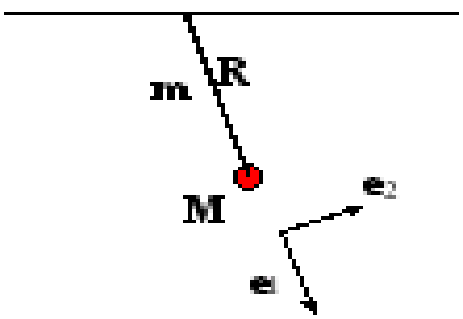
En general el cambio de coordenadas del sistema $\bar{K}(t) \rightarrow \bar{\bar{K}}(t)$ de un tensor se pueden definir en general como

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\mathbf{a,b,c,\ldots}} = \mathbf{V_{a,i} V_{b,j} V_{c,k} \ldots \bar{I}_{i,j,k,..}}$$

Es interesante notar que en general que los ejes principales (EP) no son en la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$. Una cosa es la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ y otra cosa muy diferente la dirección de orientación principal del cuerpo.

Solución utilizando el Lagrangiano

Consideremos una esfera de masa M como un péndulo conectado a un eje fijo a través de una vara de largo R y de masa m.



Asumamos un sistema de referencia en el punto de soporte fijo. La velocidad angular la podemos escribir como

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$$

mientras que el momento de inercia es la suma de los dos cuerpos

$$\mathbf{I} = \frac{mR^2}{3}\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} + \frac{2Mr^2}{5}\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{5}{2}\left(\frac{r+R}{r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{5}{2}\left(\frac{r+R}{r}\right)^2 \end{array}\right\}$$

Así vemos que este sistema de coordenadas es el sistema de ejes principales. Las integrales para la vara son relativamente fáciles de hacer ya que requieren de integrales en una dimensión, osea, x, para la vara. En este caso $\bar{I}$ es diagonal con

$$\bar{I}_{i,i} = \int_0^R \rho_m (x_1^2 - x_i^2 \delta_{i,1}) dx_1$$

lo que nos da

$$\begin{array}{rcl} \bar{I}_{1,1} & = & 0 \\ \bar{I}_{2,2} & = & mR^2/3 \\ \bar{I}_{3,3} & = & mR^2/3 \end{array}$$

ya que $\rho_m = m/R$ y $\bar{I}_{i,j} = 0$ para $i \neq j$. Para la pelota de masa M lo podemos hacer por el teorema de ejes paralelos

$$\bar{I}_{i,j} = I_{i,j}^{com} + M(\delta_{i,j}a^2 - a_i a_j) = \frac{2}{5}Mr^2\delta_{i,j} + M(r+R)^2(\delta_{i,j} - \delta_{1,1})$$

ya que $\rho_M = M/\pi r^2$. Notemos que ya estamos en el sistema de ejes principales. Es importante notar que el momento de inercia satisface los limites obvios $m \to 0$ y $r \to 0$ del péndulo normal. La energía potencial con respecto al punto fijo es

$$U = -g(m+M)Y_{CM} = -g\left(m\frac{R}{2} + M(R+r)\right)\cos\theta$$

con lo cual podemos encontrar el Lagrangiano

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{m}{3M} + \frac{2}{5}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r+R}{R}\right)^2\right)\right]\dot{\theta}^2 + gRM\left(1 + \frac{m}{2M} + \frac{r}{R}\right)\cos\theta$$

dado que $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{z}}$ y la ecuación de movimiento es entonces

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\frac{\left(1+\frac{m}{2M}+\frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{m}{3M}+\frac{2}{5}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2+\left(\frac{r+R}{R}\right)^2\right)\right]}\sin\theta$$

que tiende al caso del péndulo puntual en los limites establecidos anteriormente. Notemos que en este caso en que la dirección de $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$ es constante, podemos reconstruir la posición de cada partícula del cuerpo como $\mathbf{r}_\alpha(t) = exp(-\mathbf{J}_z\theta(t))\ \bar{\mathbf{r}}_\alpha$, pero esto solo se puede hacer porque $\hat{\mathbf{z}}$ es en una dirección constante.

4. Dinámica: ecuaciones de Euler

El problema anterior fue fácil de describir, ya que sabemos las ecuaciones de restricción y establecimos las variables independientes en termino de θ y de su derivada temporal en termino de variables del punto fijo, que de hecho es el sistema inercial. Esto sucede muy a menudo, como en el ejercicio del plano inclinado en el capitulo 2, pero el caso general no es tan fácil ya que generalmente implica transformar a un sistema de referencia no-inercial (parametrizado por 3 ángulos). Por ejemplo en el caso que la rotación implica mas de un ángulo como es el caso de la precesión, con lo cual tenemos que describir la dinámica de

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

que corresponde a 3 ángulos. En este sistema no-inercial es posible encontrar las ecuaciones de movimiento en termino de las velocidades angulares (u otra parametrización), pero al mismo requiere encontrar la transformación de las fuerzas o el potencial como veremos mas abajo.

A partir de las ecuaciones de Newton podemos encontrar las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido, osea, la ecuación de movimiento de ω. En el sistema inercial tenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$$

aunque en muchos casos, en los dos sistemas de referencia del cuerpo, podemos separar en termino del movimiento del centro de masa y del cuerpo.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} + \mathbf{L}_{rot} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt} &= \mathbf{R} \times \sum\limits_i \mathbf{F}_i = \mathbf{N}_{CM} \\ \dfrac{d\mathbf{L}_{rot}}{dt} &= \sum\limits_i \bar{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{F_i} = \mathbf{N} \end{cases}$$

En el sistema de referencia del cuerpo tenemos para la parte rotacional

$$\mathbf{L}_{rot} = \mathbf{A}^T\ \bar{\mathbf{I}}\ \boldsymbol{\omega}$$

Con lo cual la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A^T}\,\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) \\
&= \frac{d\mathbf{A}^T}{dt}\left(\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) + \mathbf{A}^T\,\mathbf{I}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{A}^T\,\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) + \mathbf{A}^T\,\bar{\mathbf{I}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \mathbf{A}^T\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) + \bar{\mathbf{I}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) + \bar{\mathbf{I}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\right]}$$

y en termino de variables del sistema de referencia del cuerpo tenemos

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{A}\,\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}\times\left(\bar{\mathbf{I}}\,\boldsymbol{\omega}\right) + \bar{\mathbf{I}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

la cual es conocida como la ecuación de Euler para cuerpos rígidos y depende solo de variables en el sistema de referencia del cuerpo. Si además nuestro sistema de referencia del cuerpo es el de ejes principales, entonces $\mathbf{I}$ es diagonal, lo que simplifica el problema.

El problema del trompo sin fuerzas es un problema interesante de resolver con esta metodología. Asumamos que encontramos los ejes principales del sistema donde el momento de inercia es diagonal. La ecuación de Euler da

$$\boxed{\begin{aligned}
I_1\,\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 \\
I_2\,\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1 \\
I_3\,\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2
\end{aligned}}$$

Nuevamente, dado que $\boldsymbol{\omega}$ esta cambiando de dirección, no es fácil escribir la matriz de rotación explícitamente. Mas adelante veremos que esto se resuelve usando una parametrización particular de la matriz con los **ángulos de Euler**.

Ejemplo 1: con la Metodología de las ecuaciones de Euler. El mismo problema del Ejemplo 1 se puede resolver por la metodología de las ecuaciones de Euler. El movimiento se puede encontrar de la ecuación para el momento angular

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

En el sistema de coordenadas del cuerpo (con respecto al punto fijo del eje) tenemos

$$\bar{\mathbf{g}} = g\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - g\sin\theta\hat{\mathbf{y}}$$

$$\bar{\mathbf{N}}_b = \sum_\alpha dm_\alpha \bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \bar{\mathbf{g}} = m\bar{\mathbf{R}}_{CM} \times \bar{\mathbf{g}} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{mgR}{2}\sin\theta$$

$$\bar{\mathbf{N}}_p = \sum_\alpha dM_\alpha \bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \bar{\mathbf{g}} = M\bar{\mathbf{R}}_{CM} \times \bar{\mathbf{g}} = -\hat{\mathbf{z}}Mg(R+r)\sin\theta$$

Usando

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$$

la ecuación de movimiento nos da

$$\ddot{\theta} = -\frac{gR\left(\frac{m}{2} + M\left(1+\frac{r}{R}\right)\right)}{\frac{mR^2}{3} + \frac{Mr^2}{4}\left(2 + 4\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)}\sin\theta$$

Inmediatamente verificamos los limites obvios, $m \to 0$ y $r \to 0$, lo que nos da que

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta$$

que es el resultado del péndulo simple.

4.1. Trompo simétrico:

Asumamos que el eje principal de inercia (EP) no es la misma dirección de ω, sino, el problema es trivial. En el sistema de EP tenemos

$$I_1 = I_2 \neq I_3$$

Notemos que aquí tenemos 2 constantes de movimiento:

1. El momento angular L en el sistema inercial es constante ya que no hay torques
2. La energía cinética T es una constante de movimiento, ya que es independiente del tiempo

$$T = \frac{1}{2}\,\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

Con estas restricciones se puede construir una soluciona gráfica, ya que vemos que el ángulo entre $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es constante como se aprecia en la Fig. 3.

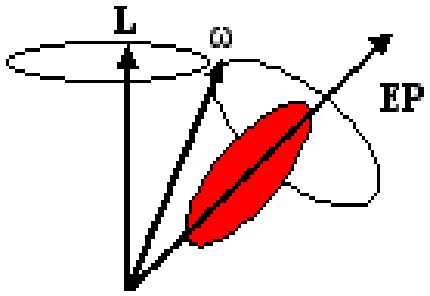


Figura 3: Cuerpo rotando.

En forma analítica, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \omega_3 &= const \\ \dot{\omega}_1 &= -\omega_o \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_o \omega_1 \end{aligned}$$

con

$$\omega_o = \omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

Estas ecuaciones dan origen a un movimiento de precesión en el sistema principal de coordenadas

$$\bar{\omega}_1 = \omega_\perp \cos(\omega_o t + \delta)$$
$$\bar{\omega}_2 = \omega_\perp \sin(\omega_o t + \delta)$$

Las variables de integración se pueden encontrar en termino de las constantes de movimiento $\mathbf{L}$ y T. El resultado es que $\bar{\mathbf{L}}$ y $\boldsymbol{\omega}$ precesan alrededor de $\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\mathbf{3}}$ y forman un plano. Por lo tanto, $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\hat{f} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_3$ forman un plano en el sistema inercial también. Es importante eso si notar que el sistema de EP rota con frecuencia $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al sistema inercial. Es fácil probar que $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\bar{\boldsymbol{x}}_3$ están en el mismo plano que precesa alrededor de $\mathbf{L}$ (que es constante). Esto se debe a que $2T = L \cdot \omega = L\omega cos\theta = const.$

La tierra tiene una deformación porque la fuerza centrifuga es mas fuerte en el Ecuador que en el polo, generando un elipsoide de revolución. Es fácil notar que la frecuencia de precesión es

$$\frac{\omega_p}{\omega_3} = \frac{\Delta I}{I}$$

lo que podemos estimar como

$$\frac{\Delta I}{I} \sim \frac{2\Delta R}{R}$$

osea cuanto aumenta el radio ecuatorial con respecto al valor promedio.

Si el planeta no rota, tenemos que una partícula de masa m en la superficie de la tierra, cerca del Ecuador, esta a una distancia R del centro, dado por el equilibrio entre la normal y la fuerza de gravedad en la superficie. Si el planeta rota, este se deforma un poco de tal forma que la perturbación de la fuerza de gravedad producida por la pequeña deformación

$$\frac{GMm}{(R+\Delta R)^2} \approx \frac{GMm}{R^2} - 2\frac{\Delta R}{R}\frac{GMm}{R^2}$$

debería compensar la fuerza centrifuga en el Ecuador

$$2\frac{\Delta R}{R}\frac{GMm}{R^2} \approx m\omega^2 R$$

lo que nos permite estimar

$$\frac{2\Delta R}{R} \approx \frac{\omega^2 R}{g} << 1$$

Y por lo tanto la frecuencia de precesión podríamos estimarla como

$$\frac{\omega_p}{\omega_3} = \frac{\omega^2 R}{g} \approx \frac{1}{500}$$

lo que implica que la frecuencia de rotación precesa alrededor del eje $\hat{z}$ con periodo

$$T \approx 500 \quad dias$$

De hecho las mediciones estiman que la tierra precesa con un periodo de 450 días, lo que implica que la deformación es dinámica ya que el cuerpo no es completamente rígido.

Es interesante notar que podemos estimar la deformación de la tierra, si asumimos que la perturbación de la fuerza de gravedad debería cancelar la fuerza centrifuga para todos los ángulos θ, en la dirección radial. Esto implica que

$$2\left(\frac{\Delta R(\theta)}{R} + \frac{\omega^2 R}{g}\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}(\theta))\right) \cdot \hat{\mathbf{r}} \approx 0$$

lo que nos da

$$2\frac{\Delta R(\theta)}{R} \approx \frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\theta$$

y tiene mucho sentido.

4.2. Trompo asimétrico:

El caso asimétrico

$$I_1 < I_2 < I_3$$

se pude integrar con una cuadratura ya que tenemos 3 ecuaciones y dos constantes de movimiento. Las constantes de movimiento en los ejes principales (EP) son

$$2T_{rot} = \sum_i^3 I_i \omega_i^2 \qquad\qquad L_{rot}^2 = \sum_i^3 (I_i \omega_i)^2$$

asumiendo que el centro de masa no se mueve. Supongamos que queremos resolver por $\omega_3(t)$, entonces podemos resolver estas constantes ω_1 y ω_2

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\left[\frac{L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_2}{I_1(I_2 - I_1)}\right] + \left[\frac{I_3(I_3 - I_2)}{I_1(I_2 - I_1)}\right]\omega_3^2 \\ \omega_2^2 &= +\left[\frac{L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_1}{I_2(I_2 - I_1)}\right] - \left[\frac{I_3(I_3 - I_1)}{I_2(I_2 - I_1)}\right]\omega_3^2 \end{aligned}$$

Podemos ahora escribir

$$I_3\dot{\omega_3} = (I_1 - I_2)\sqrt{(-\alpha_1 + \alpha_2\omega_3^2)(\alpha_3 - \alpha_4\omega_3^2)}$$

La solucion se puede encontrar a partir de

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(-\alpha_1 + \alpha_2 x^2)(\alpha_3 - \alpha_4 x^2)}} = i\frac{1}{\sqrt{\alpha_2\alpha_3}} F\left[\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}x\right), \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3}\right]$$

con

$$F[x, m] = \int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2(\theta)}}$$

como la funcion eliptica de primer tipo. Esta relacion se puede invertir como

$$\omega_3(t) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\, SN\left[i\alpha\sqrt{\alpha_2\alpha_3}(t + \delta), \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3}\right]$$

con $\alpha = (I_1 - I_2)/I_3$, y $SN[x, m]$ como la función elíptica de Jacobi, tal que tenemos que despejar δ de

$$\omega_3(0) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\, SN\left[i\alpha\sqrt{\alpha_2\alpha_3}\,\delta, \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3}\right]$$

Puede ser importante notar que $SN[0, m] = 0$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_2}{I_3(I_3 - I_2)} \\
\alpha\sqrt{\alpha_2\alpha_3} &= \sqrt{\frac{(L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2 I_3}} \\
\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3} &= \frac{(L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_2)(I_3 - I_1)}{(L_{rot}^2 - 2T_{rot}I_1)(I_3 - I_2)}
\end{aligned}
$$

Problema: Tomemos martillo que lo consideraremos como un cuerpo rígido compuesto de tres masas iguales, posicionadas en $t = 0$ como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= [0, 0, 0] \\
\mathbf{r}_2 &= L_o[0, -\cos(\alpha), \sin(\alpha)] + \beta L_o[0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)] \\
\mathbf{r}_3 &= L_o[0, -\cos(\alpha), \sin(\alpha)] - \beta L_o[0, \sin(\alpha), \cos(\alpha)]
\end{aligned}
$$

El martillo inicialmente se mueve con $\boldsymbol{\omega}(0) = [0, 0, \omega_o]$. Usando un origen en el centro de masa, podemos escribir

$$
I = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{3\beta^2\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2}{1 + 3\beta^2} & \dfrac{(1 - 3\beta^2)\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{1 + 3\beta^2} \\
0 & \dfrac{(1 - 3\beta^2)\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{1 + 3\beta^2} & \dfrac{\cos(\alpha)^2 + 3\beta^2\sin(\alpha)^2}{1 + 3\beta^2}
\end{bmatrix}
$$

Los ejes principales están definidos por la matriz

$$
\mathbf{v}_1 = [1, 0, 0] \qquad \mathbf{v}_1 = [0, \tan(\alpha), 1] \qquad \mathbf{v}_1 = [0, -\cot(\alpha), 1]
$$

con momentos $I_1 = 1$, $I_2 = 1/(1 + 3\beta^2)$ y $I_3 = 3\beta^2/(1 + 2\beta^2)$.

El momento angular es

$$
\mathbf{L}(0) = \mathbf{A}(0)\ I\ \boldsymbol{\omega}(0) = \omega_o \begin{bmatrix}
0 \\
\dfrac{(1 - 3\beta^2)\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{1 + 3\beta^2} \\
\dfrac{\cos(\alpha)^2 + 3\beta^2\sin(\alpha)^2}{1 + 3\beta^2}
\end{bmatrix}
$$

y las constantes de movimiento son

$$
L^2(t) = \boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{I}^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) = L^2(0) = \boldsymbol{\omega}^T(0)\mathbf{I}^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_o^2 \frac{1 + 9\beta^4 + (1 - 9\beta^4)\cos(2\alpha)}{2(1 + 3\beta^2)^2}
$$

y

$$2T(t) = \boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) = 2T(0) = \boldsymbol{\omega}^T(0)\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_o^2 \frac{\cos(\alpha)^2 + 3\beta^2 \sin(\alpha)^2}{1+3\beta^2}$$

Haciendo la transformación al sistema de los ejes principales, podemos resolver estas ecuaciones por $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ en función de $\omega_3(t)$.

Problema: En el problema anterior, resuelva en el sistema de los ejes principales. Existen algún set de parámetros α, β y ω_o que hacen que el sistema precese?

Algo muy interesante es que un objeto con tres momentos de inercia en el sistema EP es inestable a rotaciones en la dirección del momento de inercia intermedio. Asumamos

$$I_1 < I_2 < I_3$$

y que tenemos una rotación inicial en el eje 2 y una perturbación pequeña

$$\omega = \omega_o \hat{\mathbf{y}} + (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$$

y apliquemos las ecuaciones de Euler a este sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &\approx \epsilon_3 \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_o \\ \dot{\epsilon}_2 &\approx 0 \\ \dot{\varepsilon}_3 &\approx \epsilon_1 \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_o \end{aligned}$$

lo que nos da que

$$\ddot{\varepsilon}_1 + \left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3}\bar{\omega}_2^2\right]\varepsilon_1 = 0$$

lo que implica que la perturbación es inestable precisamente en la dirección 2.

Caso 3 solución geométrica:

Sabemos que para este caso la energía cinética y el momento angular (en el sistema inercial) son constantes. En termino de las variables del sistema de ejes principales,

$$\bar{L}_i = \bar{I}_i \omega_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \sum \dfrac{\bar{L}_i^2}{\bar{I}_i} = const \\ L^2 = \sum \bar{L}_i^2 = const \end{cases}$$

tenemos que el movimiento del momento angular es periódico en el sistema principal de ejes y se realiza en la intersección de una esfera y un elipsoide.

En el sistema de referencia inercial, usamos la construcción de Poinsot. El momento angular define un plano invariante en el espacio, y el componente de $\boldsymbol{\omega}$ perpendicular a $\mathbf{L}$ se mueve en este plano. Es fácil darse cuenta que

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\omega} T$$

por lo tanto $\mathbf{L}$ es perpendicular al plano tangente al elipsoide y el movimiento del elipsoide es tal que rota en el plano invariante.

5. Método del Lagrangiano

Ahora desarrollaremos la metodología del Lagrangiano utilizando

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}^T \bar{\mathbf{I}}\, \boldsymbol{\omega}$$

pero recordando que

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

Vemos en general que la dinámica del cuerpo rígido se puede descomponer en termino de un movimiento de traslación y de movimiento rotatorio, los cuales se pueden resolver en forma independiente. En general nos damos cuenta que la dinámica de este cuerpo requiere 6 variables, 3 que determinan el movimiento del origen del sistema de coordenadas del cuerpo y 3 ángulos independientes que orientan al cuerpo con respecto al origen del sistema de coordenadas.

5.1. Otra parametrización de la rotación: ángulos de Euler

Notemos que aunque nos interesa poder describir $\theta(t)$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, esto es no trivial. Pero también notemos que finalmente nos interesa poder describir $\mathbf{A}$ en términos de tres ángulos, que llamaremos ángulos de Euler, y entonces el problema se centra en relacionar estos ángulos con $\boldsymbol{\omega}(t)$. Veremos que este análisis es también fundamental en la mecánica cuántica.

Concentrémonos en el puro movimiento de rotación. Ya vimos que cuando $\boldsymbol{\omega}$ esta cambiando de dirección, es difícil construir la matriz rotación ya que

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \neq \frac{d}{dt}\left(\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Además esta parametrización es muy útil cuando no hay fuerzas o torques sobre el sistema, pero es complicado utilizarla cuando estas fuerzas existen. La dificultad yace en el hecho que es difícil escribir estas fuerzas, en termino de $\theta(t)$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Esta es una de las razones que buscamos una parametrización en termino de ángulos específicos y no de $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Una vez que esta parametrización es definida, debemos encontrar la dependencia de $\boldsymbol{\omega}$ en termino de las derivadas temporales de los ángulos que parametrizan la transformación.

Podemos parametrizar la rotación de varias maneras (de hecho hay 12 parametrizaciones), y ahora nos concentramos en la parametrización con los ángulos de Euler. Estos 3 ángulos independientes se pueden tomar como los 3 ángulos de Euler que definen la transformación

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{A}(\psi, \theta, \phi)\mathbf{x} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\phi \mathbf{r}$$

que definimos de la siguiente forma

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

además es fácil encontrar el inverso. Con esta parametrización podemos escribir $\boldsymbol{\omega}$, en el sistema de referencia del cuerpo, en termino de las derivadas de (θ, ϕ, ψ). Ahora comprobaremos que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \bar{\omega}_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \bar{\omega}_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Estas relaciones se obtienen de

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\mathbf{b})$$

donde

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \dot{\mathbf{A}}_\phi \mathbf{b} + \mathbf{A}_\psi \dot{\mathbf{A}}_\theta \mathbf{A}_\phi \mathbf{b} + \dot{\mathbf{A}}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\phi \mathbf{b}$$

Ahora,

$$\dot{\mathbf{A}}_\phi \mathbf{b} = \dot{\phi}\ \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{A}_\phi \mathbf{b})$$

y

$$\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \left[\dot{\phi}\ \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{A}_\phi \mathbf{b})\right] = \left[\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta\ \dot{\phi}\ \hat{\mathbf{z}}\right] \times (\mathbf{A}\mathbf{b})$$

De la misma forma

$$\dot{\mathbf{A}}_\theta b = (\dot{\theta}\ \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{A}_\theta \mathbf{b}$$

y

$$\mathbf{A}_\psi \left[(\dot{\theta}\ \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\phi \mathbf{b}\right] = \left[\mathbf{A}_\psi\ \dot{\theta}\ \hat{\mathbf{x}}\right] \times (\mathbf{A}\mathbf{b})$$

Finalmente

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\mathbf{b}) = \left[\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \, \dot{\phi} \, \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_\psi \, \dot{\theta} \, \hat{\mathbf{x}} + \dot{\psi} \, \hat{\mathbf{z}}\right] \times (\mathbf{A}\mathbf{b})$$

o

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \, \dot{\phi} \, \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_\psi \, \dot{\theta} \, \hat{\mathbf{x}} + \dot{\psi} \, \hat{\mathbf{z}}$$

Notemos que esto funciona para cualquier sistema de referencia, incluyendo los ejes principales.

5.2. La energía cinética

Con la resolución de $\boldsymbol{\omega}$ en termino de las derivadas de (θ, ϕ, ψ) podemos re-escribir la energía cinética rotacional como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \, \boldsymbol{\omega}^T \, \mathbf{I} \, \boldsymbol{\omega}$$

En particular en el **sistema de ejes principales** podemos encontrar en termino de las variables generalizadas que

$$\begin{aligned} 2T_{rot} = \bar{\omega}_i \bar{I}_i \bar{\omega}_i = \bar{I}_1 \left(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\right)^2 \\ + \bar{I}_2 \left(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\right)^2 + \bar{I}_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 \end{aligned}$$

Con esta definición podemos observar que estas ecuaciones satisfacen las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}_3}\frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \dot{\psi}} = \bar{I}_3 \omega_3$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}_1}\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \psi} + \frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}_2}\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \psi} = (\bar{I}_1 - \bar{I}_2)\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2$$

Con esto es fácil probar que las otras ecuaciones se satisfacen por permutación cíclica.

Con esta definición podemos definir el momento canónico finalmente

$$p_\psi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \bar{I}_3\bar{\omega}_3 = \bar{L}_3 = L_1 \sin\theta\sin\phi - L_2\sin\theta\cos\phi + L_3\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \bar{L}_1\cos\psi - \bar{L}_2\sin\psi$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} = L_3 = \bar{I}_1\bar{\omega}_1\sin\theta\sin\psi + \bar{I}_2\bar{\omega}_2\sin\theta\cos\psi + \bar{I}_3\bar{\omega}_3\cos\theta$$

Con esta definición podemos encontrar el Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \dot{\theta}\, p_\theta + \dot{\phi}\, p_\phi + \dot{\Psi}\, p_\Psi - \mathscr{L}$$

puramente en termino de las variables (θ, ϕ, ψ) y sus momentos asociados. Es fácil establecer desde el Hamiltoniano cuales son las variables cíclicas y las constantes de movimiento.

5.3. Caso trompo simétrico bajo la fuerza de gravedad y con punto fijo

En este caso tenemos que en el sistema del los EP la energía cinética es

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left[\bar{I}_1(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2) + \bar{I}_3\bar{\omega}_3^2\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{I}_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \bar{I}_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

Ahora tenemos que escribir el potencial en termino de estas variables (θ, ϕ, ψ). En el sistema $\bar{K}$ definimos la posición del centro de masa como

$$\bar{\mathbf{R}}_{com} = [0, 0, h] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{R_{com}} = \mathbf{A^T(t)}\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{com}}$$

y por lo tanto en el sistema inercial con origen en el punto fijo es

$$U = Mgz_{com} = Mgh\cos\theta$$

Es conveniente orientar el sistema de referencia de esta forma ya que el ángulo θ representa la 2da transformación de Euler con respecto al eje 1.

En esta representación las variables (ϕ, ψ) son cíclicas

$$p_\psi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = \bar{I}_3\bar{\omega}_3 = \left(\bar{I}_1\sin^2\theta + \bar{I}_3\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + \bar{I}_3\cos\theta\dot{\psi} = const$$

$$p_\phi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \bar{I}_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = const$$

Ahora podemos resolver por $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\Psi\cos\theta}{2\bar{I}_1\sin\theta^2}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\Psi}{\bar{I}_3} + \frac{(-p_\phi + p_\Psi\cos\theta)\cos\theta}{\bar{I}_1\sin\theta^3}\right]$$

Ahora podemos re-escribir el Hamiltoniano (que es constante) como

$$\mathscr{H} = \frac{p_\theta^2}{2\bar{I}_1} + \frac{(\bar{I}_1 - \bar{I}_3)p_\Psi^2}{2\bar{I}_1\bar{I}_3} + V[\theta]$$

con

$$V[\theta] = Mgh\cos\theta + \frac{p_\phi^2 + p_\Psi^2 - 2p_\phi p_\Psi\cos\theta}{2\bar{I}_1\sin\theta^2}$$

que se puede resolver en la misma forma que resolvimos el problema de la fuerza central. Hay soluciones que dan origen a movimiento con $\theta = const$ y otros en que varia. Por ejemplo, podemos normalizar p_ϕ y p_Ψ y escribir

$$\bar{V} = \frac{(\bar{p}_\phi - \bar{p}_\psi \cos\theta)}{\sin^2\theta} + \cos\theta$$

Una vez que tenemos $\theta(t)$ podemos encontrar $\phi(t)$ y $\psi(t)$.

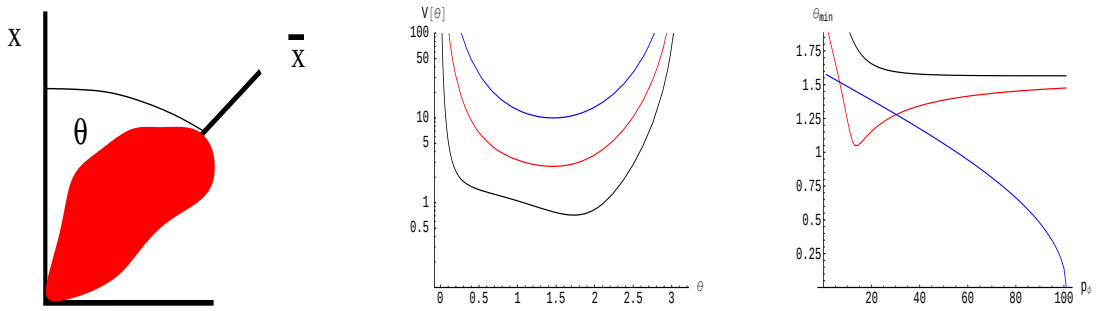


Figura 4: (a) Relación entre los dos sistemas de coordenadas. Potencial $\bar{V}[\theta]$ para $\bar{p}_\Psi = 0{,}5$ y $\bar{p}_\phi = 0{,}7, \pi/2, \pi$. El ángulo $\theta = const$ en el mínimo del potencia con función de $\bar{p}_\phi$ para $\bar{p}_\Psi = 0{,}1, 1, 10$.

Problema: Resolver la dinámica del cuerpo que se muestra en la Fig. 5. Notemos que si asumimos que las partículas están en $r_1(0) = L[0, \cos\alpha, -\sin\alpha]/m$ y $r_2(0) = L[0, -\cos\alpha, \sin\alpha]/M$. Por lo tanto el momento de inercia en estas coordinadas

$$\mathbf{I} = \frac{L^2(m+M)}{mM} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

y $\boldsymbol{\omega}(0) = [0, 0, \omega_o]$. Dado que en este sistema la matriz de rotación satisface

$$\mathbf{A}(t=0) = \mathbf{1}$$

tenemos que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_o \sin\alpha\cos\alpha \\ \omega_o \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

Notemos que el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ a menos que $\alpha = 0$. Dado que L^2 y T son constantes de movimiento, obtenemos la relación

$$\omega_o^2 \cos^2(\alpha) = \omega_1^2 + (\sin(\alpha)\omega_2 + \cos(\alpha)\omega_3)^2$$

En este caso las dos condiciones generan una sola relacion. Esto se debe a que uno de los momentos principales es cero, y dos son iguales. Los ejes principales están definidos por la matriz

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Los momentos son $I_1 = 1$, $I_2 = 1$ y $I_3 = 0$, pero aun es posible definir la transformación ortogonal $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = 1$, tal que

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{o}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\omega}_o = \omega_o[\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)]$$

Las ecuaciones de movimiento en este nuevo sistema son

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\, \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = \omega_3\, \omega_1$$

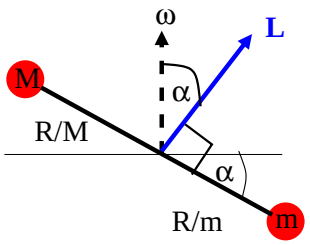


Figura 5: Condición inicial.

6. Precesión de cargas en un campo magnético

Supongamos que tenemos un campo magnético constante. Podemos describir el Lagrangiano como

$$\mathscr{L} = T - U = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{q_i}{c}\mathbf{A}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right] + \sum_{i \neq j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

Para un campo magnético constante podemos escribir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

Definamos la frecuencia angular de Larmor

$$\boldsymbol{\omega}_L = \sum_i \frac{q_i \mathbf{B}}{mc}$$

y la magnetización

$$\mathbf{M} = -\sum_i \left(\frac{q_i}{2mc}\right) \mathbf{L}$$

con lo que podemos escribir

$$\sum_i \frac{q_i}{c}\mathbf{A}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega}_L \cdot \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times m\dot{\mathbf{r}}_i\right) = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}$$

Podemos hacer una transformación a un sistema de referencia que rota con frecuencia angular $\boldsymbol{\omega}_L$ con lo que transformamos el Lagrangiano a

$$\mathscr{L} = \sum_i \frac{1}{2} m\ \bar{v}_i^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_L^T\ \mathbf{I}\ \boldsymbol{\omega}_L + \sum_{i\neq j} U(|\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j|)$$

Osea, que un campo magnético constante y externo genera una precesión en un sistema de partículas. Esta expresión se puede simplificar aun mas si nos vamos al sistema de ejes principales.

7. Movimiento Planetario

Preguntemonos que pasa cuando tenemos un satélite de masa m asimétrico alrededor de un planeta de masa $M >> m$. Es fácil darse cuenta que el satélite se moverá a primer orden en la orbita elíptica que le corresponda para su excentricidad ϵ, pero existirá a primer orden un torque neto sobre el cuerpo que lo hará girar en una forma no trivial.

La energía cinética es razonablemente fácil de calcular, ya que si usamos el centro de masa del satélite, con $M >> m$ podemos asumir que $\mu = m$. Entonces tenemos

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left(\dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{A}^T\mathbf{r}_\alpha\right)\right)^2$$

Dado que $M >> m$ nos concentramos en el plano que forman el centro de masa del satélite y el planeta

$$T = \frac{1}{2}\left[m\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}\right] + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

donde $\mathbf{R}$ es la posición del centro de masa del satélite. Hemos hecho la transformación al sistema del cuerpo. Elijamos dirección de los ejes de rotación como su EP

$$\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\omega}^T\ \mathbf{I}\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_i\ \omega_i^2$$

La energía cinética rotacional la podemos escribir en termino de $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$. Ahora necesitamos estimar la energía potencial que tendrá términos que van mas allá de un potencial central.

$$U = -GM\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{\sqrt{R^2 + r_\alpha^2 - 2R\cdot r_\alpha}}$$

Podemos estimar

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+r_\alpha^2-2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_\alpha}} \approx \frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_\alpha}{R^2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\frac{r_\alpha^2}{R^2}+\frac{3(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_\alpha)^2}{2R^4}\right)+O\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$$

El segundo termino en el paréntesis da cero, ya que

$$\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{0}$$

Veamos el tercer termino, usando $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{r}}_\alpha$, como

$$-\sum_\alpha \frac{1}{2R^4}(R_i)\left(\bar{r}_\alpha^2\delta_{i,j}-3A_{n,i}(\theta,\phi,\psi)A_{j,m}(\theta,\phi,\psi)\bar{x}_{\alpha,n}\bar{x}_{\alpha,m}\right)R_j$$

lo que podemos escribir como

$$U = -\frac{GM}{2R^4}\bar{\mathbf{R}}^T\ \mathbf{W}\ \bar{\mathbf{R}}$$

con el tensor constante

$$W_{i,j} = \sum_\alpha m_\alpha\left(\bar{r}_\alpha^2\delta_{i,j}-3\bar{x}_{\alpha,n}\bar{x}_{\alpha,m}\right)$$

Para el caso particular que el satélite se mueve en el plano $x-y$ vemos que a primera aproximación el satélite hace una orbita elíptica descrita por

$$L = \frac{1}{2}\left[m\dot{r}^2+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}\right]+\frac{GMm}{r}$$

que tiene solución

$$r = \frac{r_o}{1+\epsilon\cos\theta}$$

Pero el satélite rota con un Lagrangiano

$$L_p \approx \frac{1}{2}I_i\,\omega_i^2+\sum_\alpha \frac{GMm}{2R^4}\ \bar{\mathbf{R}}^T\ \mathbf{W}\ \bar{\mathbf{R}}$$

Si usamos el EP, tenemos

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2I_1-(I_2+I_3) & 0 & 0 \\ 0 & 2I_2-(I_1+I_3) & 0 \\ 0 & 0 & 2I_3-(I_1+I_2) \end{pmatrix}$$

7.1. Precesión caótica de satélites y planetas

7.2. Caso $M \sim m$

Es mas complicado y muy interesante.

8. Apéndice A: Convención de Einstein

De ahora en adelante usaremos la convención de Einstein en los índices (esta convención la generalizaremos mas adelante). Esto significa que índices repetidos implica sumatoria. Definamos

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_k = \varepsilon_{i,j,k}A_iB_j$$

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} P(i,j,k) & i\neq j\neq k \\ 0 & otro \end{cases}$$

con $P(i,j,k)=(-1)^n$, con n como el numero de permutaciones de (i,j,k) de elementos adyacentes requeridos para obtener $(1,2,3)$. Por ejemplo

$$P(2,3,1) = -P(2,1,3) = P(1,2,3) = 1$$

mientras que

$$P(3,2,1) = -P(3,1,2) = P(1,3,2) = -P(1,2,3) = -1$$

Con estas definiciones podemos establecer

$$\varepsilon_{i,j,k}\varepsilon_{l,m,k} = \delta_{i,l}\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\delta_{j,l}$$

con $\delta_{i,j}=0$ si $i=j$, y cero para otros casos. Esta relación fundamental permite probar que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_k(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_k \\ &= \varepsilon_{i,j,k}A_iB_j\varepsilon_{l,m,k}A_lB_m \\ &= (\delta_{i,l}\delta_{j,m}-\delta_{i,m}\delta_{j,l})A_iB_jA_lB_m \\ &= A^2B^2-(A\cdot B)^2\end{aligned}$$