

## Capítulo 3: Fuerza Central

Un problema muy interesante que podemos estudiar desde el punto de vista del principio de Hamilton es el caso de una fuerza central con  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$

$$F_{j,i} = -U'(r_{ij}) \frac{r_j - r_i}{|r_{ij}|}$$

que representan las principales fuerzas en las cuales estamos interesados, como la fuerza de gravedad  $U(r_{i,j}) = -Gm_i m_j / r_{i,j}$  o la fuerza eléctrica  $U(r_{i,j}) = -kq_i q_j / r_{i,j}$ . Estas fuerzas son conservativas y la energía potencial se puede escribir como

$$U(r) = - \int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\infty}^r U'(r) dr$$

si asumimos que  $U = 0$  en alguna parte. Por ejemplo estamos interesados en el potencial simple

$$U = -\frac{k}{r^n}$$

Vimos en el capítulo anterior que en general podemos separar la energía cinética, usando  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_{com} + \bar{\mathbf{r}}$ , en

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} M V_{com}^2 + \sum_i \frac{m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2}{2}$$

en termino de la energía cinética del centro de masa y respecto al centro de masa. El caso de la energía potencial es un poco mas complicado ya que incluye las fuerzas entre las partículas y las fuerzas externas. Para un sistema cerrado tenemos

$$U = \sum_{j>i} U_{i,j}(r_{i,j})$$

con la conservación de la energía

$$\frac{d}{dt} (T + U) = 0$$

# Índice

<b>1. Dos cuerpos</b>	<b>3</b>
1.1. Trayectorias . . . . .	4
1.2. Clasificación de Orbitas . . . . .	5
1.3. Estabilidad de las órbitas circulares . . . . .	7
<b>2. Problema de Kepler</b>	<b>8</b>
2.1. La primera Ley de Kepler . . . . .	10
2.2. La segunda Ley de Kepler . . . . .	10
2.3. La tercera Ley de Kepler . . . . .	10
<b>3. Escatering en una fuerza central</b>	<b>11</b>
3.1. En el Laboratorio . . . . .	15
3.2. Colisión elástica . . . . .	17
3.3. Colisión inelástica . . . . .	17
<b>4. Problema de 3 cuerpos <math>\rightarrow</math> caos</b>	<b>17</b>
<b>5. Teorema virial</b>	<b>20</b>
5.1. Caso 1: fuerzas centrales . . . . .	20
5.2. Caso 2: Gas ideal . . . . .	21

# 1. Dos cuerpos

El caso de un sistema cerrado (no fuerzas externas) con dos cuerpos que interactúan bajo una fuerza central es de particular interés. La energía cinética se puede re-escribir, usando  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , como

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2$$

con  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ , denominada la masa reducida. La transformación inversa es

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{com} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_{com} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r}$$

La energía potencial es  $U(\mathbf{r})$ . Las variables del centro de masa son cíclicas y tenemos inmediatamente

$$\dot{\mathbf{V}}_{com} = const \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}_{com}(t) = \mathbf{R}_{com}(0) + \mathbf{V}_{com}t$$

Por lo tanto hemos reducido el problema a un cuerpo de masa  $\mu$  bajo una fuerza central

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - U(r)$$

en coordenadas esféricas, lo que en principio nos da 3 ecuaciones de movimiento. Además, para una fuerza central tenemos la conservación de los tres componentes del vector de momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = const$$

La trayectoria, tanto  $\mathbf{r}$  como  $\mathbf{p}$ , se realiza en un plano perpendicular a  $\mathbf{L}$ , cuya dirección la podemos definir como la dirección  $z$ . La trayectoria se puede re-escribir en termino de coordenadas polares

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - U(r)$$

Esto se puede inferir directamente desde el Lagrangiano en coordenadas esféricas. Este Lagrangiano nos da

$$\begin{aligned} \mu r^2 \dot{\theta} &= p_\theta = const \\ \mu \ddot{r} &= \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - U'(r) \end{aligned}$$

osea, tenemos una energía potencial efectiva

$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{eff}(r) \quad \rightarrow \quad V_{eff}(r) = U(r) + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}$$

Vemos que hay un termino centrifugo en la energía potencia efectiva. Además las fuerzas son conservativas por lo tanto tenemos conservación de la energía E

$$H = E = T + U = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

y además es igual al Hamiltoniano.

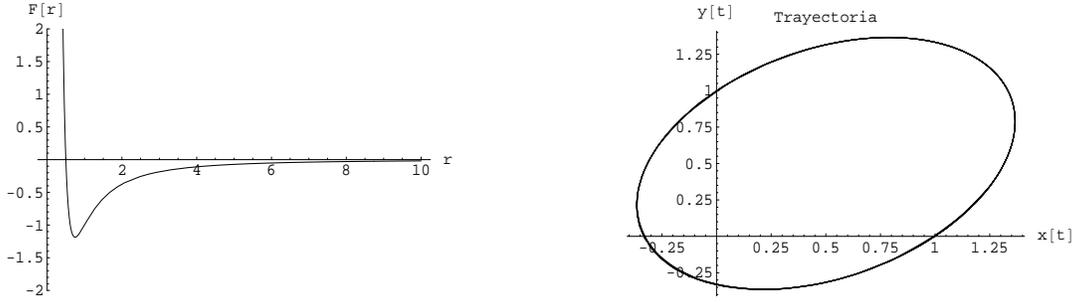


Figura 1: (a) Potencial efectivo y (b) Trayectoria para  $n = 1$ .

## 1.1. Trayectorias

Estrictamente podemos escribir la solución para la variable  $\theta$  en termino de la dinámica de  $r$ , como

$$\theta(t) = \theta_o + p_\theta \int_0^t \frac{1}{\mu r(t)^2} dt$$

Ahora necesitamos encontrar  $r(t)$ . Si usamos el principio de conservación de energía podemos escribir

$$t - t_o = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Pero esta expresión solo funciona mientras  $\dot{r} > 0$ . Para el caso  $\dot{r} < 0$  el signo cambia. Estas integrales se pueden escribir en termino de integrales elípticas para el potencial simple, pero para el caso general es bastante complicado encontrar una solución en termino de funciones conocidas. De la misma forma podemos despejar estas relaciones para obtener  $r(\theta)$

$$\theta - \theta_o = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_o}^r \frac{(p_\theta/r^2) dr}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

También podemos integrar directamente las ecuaciones de movimiento. Escalemos estas ecuaciones con

$$x = r/r_o \quad \tau = t/t_o$$

y obtenemos

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \left[ \frac{t_o p_\theta}{\mu r_o^2} \right] \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \left[ \frac{t_o p_\theta}{\mu r_o^2} \right]^2 \frac{1}{x^3} - \frac{t_o^2}{r_o} U'(x r_o)$$

por lo que vemos que  $t_o = \mu r_o^2 / p_\theta$  para escalar el sistema. Vemos que si definimos por ejemplo

$$t_o = \frac{p_\theta}{E} \quad r_o = \frac{p_\theta}{\sqrt{-\mu E}}$$

las ecuaciones de movimiento se pueden normalizar a

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{p_\theta \sqrt{-\mu E}}{E^2} U' \left( \frac{p_\theta}{\sqrt{-\mu E}} x \right)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{x^2}$$

Tomemos el potencial simple

$$U(r) = -\frac{k}{r^n} \quad \rightarrow \quad F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{nk}{r^{n+1}}$$

lo que nos da

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^{n+1}}$$

con

$$b = \frac{nk\mu}{-E} \left[ \frac{p_\theta}{\sqrt{-\mu E}} \right]^{-n}$$

En la figura integramos las ecuaciones de movimiento numéricamente y encontramos las trayectorias en el plano. En la Figura integramos numéricamente los casos  $n = 0.9, 1.0, 1.1, -2$  para  $b = 2$ . Vemos que el caso  $n=1, -2$  dar órbitas cerradas, osea, se repiten en el tiempo. Este es en general cierto, solo para el caso del problema gravitacional y para el oscilador armónico tenemos órbitas cerradas.

Otra forma de encontrar una solución analítica a muchos problemas es haciendo la transformación  $u(\theta) = 1/r(\theta)$  como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{p_\theta^2 u^2} F(u) \quad \rightarrow \quad F(u) = -\frac{dU(r)}{dr} \Big|_{r=1/u}$$

Esta ecuación se puede usar para encontrar las fuerzas desde una órbita conocida.

## 1.2. Clasificación de Orbitas

Mirando las ecuaciones de movimiento nos damos cuenta que tenemos un problema típicamente de una dimensión, con un potencial efectivo

$$V = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

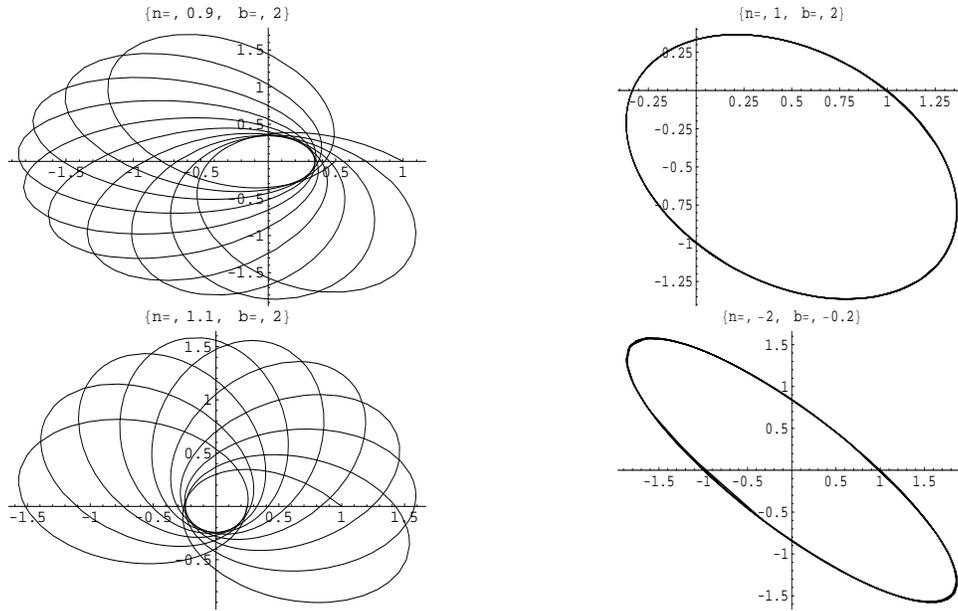


Figura 2: Trayectorias para (a)  $n = 0,9$  y  $p_\theta = 2$ , (b)  $n = 1$  y  $p_\theta = 2$ , (c)  $n = 1,1$  y  $p_\theta = 2$ , (d)  $n = -2$  y  $p_\theta = -0,2$ .

Entonces el problema es exactamente similar a un problema en una dimensión con el potencial efectivo  $V(r)$  que incluye el potencial centrífugo. Veamos algunos casos importantes. Tomemos el potencial simple

$$U(r) = -\frac{k}{r^n} \quad \rightarrow \quad F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{nk}{r^{n+1}}$$

Entonces tenemos en la figura con  $n=1$  para diferentes valores de  $p_\theta$ ,

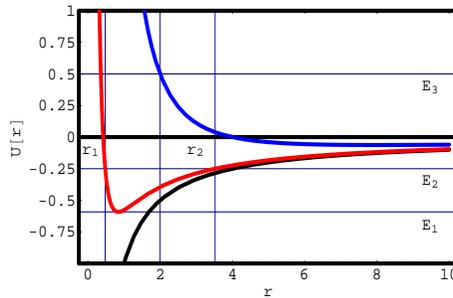


Figura 3: Potencial efectivo para diferentes valores de  $(p_\theta)^2/(2\mu k) = 0, 0,5, 2$ .

Trayectorias con energía  $E_1$  solo pueden satisfacer una órbita en que  $dr/dt = 0$ , osea una órbita circular. Trayectorias con energía  $E_2$  permiten una órbita entre los radios  $r_1$  y  $r_2$ . Esto no significa que la órbita sea cerrada, ya que todo depende de que pasa con la dependencia  $\theta(t)$ . Para los casos

$n = 1, -2$  veremos que efectivamente tenemos una órbita cerrada (una órbita que se repite en el tiempo). Mientras que la trayectoria con energía  $E_3$  da origen a una órbita que nunca vuelve. Para el caso  $n = 1$  esta órbita es una hipérbola.

Caso mas complicados se pueden dar para el caso el potencial tenga mínimos y máximos. En esos casos la trayectoria puede no estar acotada en  $r$ , pero puede permanecer mucho tiempo en la cercanía dando muchas vueltas.

### 1.3. Estabilidad de las órbitas circulares

Orbitas circulares se dan cuando  $dr/dt = 0$ . Esto implica que

$$E = V(r_o) \quad \rightarrow \quad \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_o} = 0$$

La órbita circular es estable si además tenemos que

$$\left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_o} > 0$$

para que la órbita circular sea un mínimo del potencial efectivo. Si usamos el potencial simple, estas dos condiciones no dan

$$n < 2$$

Osea que los potenciales simples con  $n > 2$  no producen órbitas circulares estables. Pero que pasa con la frecuencia de oscilación cercana a esta órbita circular. Como siempre cuando trabajamos con perturbaciones, asumimos  $r(t) = r_o + \eta(t)$ , con lo que Mathematica nos da

$$\frac{p_\theta^2}{\mu r_o^3} = \frac{dU}{dr} \quad \rightarrow \quad \ddot{\eta} + \left[ \frac{3}{\mu r_o} \frac{dU(r_o)}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d^2U(r_o)}{dr^2} \right] \eta = 0$$

Si asumimos una perturbación periódica en  $t$ , entonces tenemos

$$\eta(t) = Ae^{i\omega_o t} \quad \rightarrow \quad \omega_o^2 = \frac{3}{\mu r_o} \frac{dU(r_o)}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d^2U(r_o)}{dr^2}$$

por lo tanto la condición de estabilidad es que, usando

$$F[r] = -\frac{dU(r_o)}{dr} \quad \rightarrow \quad \omega_o^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{F'[r]}{F[r]} + \frac{3}{r_o} > 0$$

y para un potencial simple tenemos nuevamente

$$U = -\frac{k}{r^n} \quad \rightarrow \quad n < 2$$

El teorema de Bertrand, el cual dejamos para la tarea, establece que las únicas órbitas cerradas para el potencial normal, son aquellas con  $n = 1, -2$ . Para probar este teorema, usamos la ecuación

que satisface  $r(\theta)$  y vemos las perturbaciones a distinto orden. A primer orden  $r(\theta) = r_o + a \cos(\alpha\theta)$ , lo que resulta en

$$\alpha^2 = 3 + \frac{r_o}{F[r_o]} F'[r_o]$$

Para estabilidad necesitamos que  $\alpha^2 > 0$ , y es la misma condición anterior para el potencial simple. Y para órbitas cerradas tenemos que  $\alpha$  debe de ser racional. Esta ecuación se puede mirar como una ecuación diferencial para F, con lo cual tenemos que las fuerzas tienen la forma

$$F[r_o] = -\frac{k}{r^{3-\alpha^2}}$$

cerca de la orbita circular. Para nuestro potencial simple, tenemos que

$$\alpha^2 = 2 - n$$

Por lo tanto a segundo orden cerca de la órbita circular, nos da una ecuación para  $\alpha$ , y determina que orbitas pueden ser cerradas. Esto es equivalente a decir que  $\omega_o$  y  $\dot{\theta}$  sean conmensurables

$$\alpha = \sqrt{2 - n} = m \quad \rightarrow \quad n = 1, -2, -7, \dots$$

La teoría de la relatividad predice que cerca de objetos masivos, la fuerza de gravedad en primera aproximación se puede describir como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2M}{p_\theta^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

Esta perturbación al problema clásico con  $n = 1$ , se debe a que el espacio es curvo, no Euclidiano, cerca de los cuerpos masivos. Si asumimos que la perturbación es pequeña, podemos encontrar una solución que precesa en el tiempo. Esta precesión ha sido medida para el planeta Mercurio alrededor del sol y el resultado concuerda con las predicciones de la teoría de la relatividad general. Este fue una de las mediciones mas importantes del siglo XX, ya que termino de convencer a los científicos que el espacio era de hecho curvo.

## 2. Problema de Kepler

En caso de las órbitas Keplerianas tenemos el potencial simple con  $n = 1$ .

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu k}{p_\theta^2} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\mu k}{p_\theta^2} + A \cos(\theta - \theta')$$

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + A \cos(\theta - \theta')$$

Este problema también se puede resolver con el uso de las integrales de cuadratura descritas arriba. Normalizando obtenemos rápidamente

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{p_\theta^2}{\mu k} \\ \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2E p_\theta^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta')}$$

La excentricidad  $\varepsilon$  se puede evaluar en los extremos de la orbita donde  $\dot{r} = 0$ , esto es

$$E = V_{eff} \left( \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \right)$$

Tenemos las siguientes trayectorias

- $\varepsilon > 1$  o  $E > 0$  tenemos una Hipérbola donde la trayectoria llega a  $r \rightarrow \infty$  y

$$\theta_\infty \rightarrow -\theta_o \pm (\pi - \cos^{-1} 1/\varepsilon)$$

con velocidad positiva

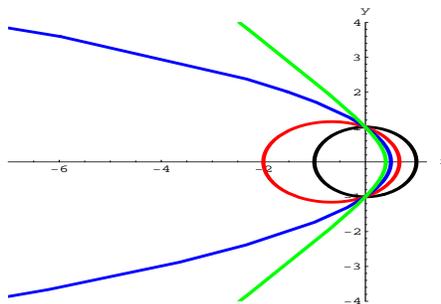
- $\varepsilon = 1$  o  $E = 0$  tenemos una Parábola donde la trayectoria llega a  $r \rightarrow \infty$  y

$$\theta_\infty \rightarrow -\theta_o \pm \pi$$

con velocidad cero

- $0 < \varepsilon < 1$  o  $-\mu k^2/2p_\theta^2 < E < 0$  tenemos una Elipse
- $\varepsilon = 0$  o  $E = -\mu k^2/2p_\theta^2$  tenemos un Circulo
- $\varepsilon < 0$  o  $E < -\mu k^2/2p_\theta^2$  no hay trayectorias posibles.

Además hay otras trayectoria posibles, las que tienen  $p_\theta = 0$ . Dependiendo de la energía estas trayectorias se mueven en línea recta y pueden llegar al punto  $r = 0$ . Obtener las trayectorias en función del tiempo es mas complicado, pero se puede hacen en termino de funciones elípticas.



Usando esta ecuación de movimiento para un satélite mientras se acerca a un cuerpo celeste, es posible demostrar que uno puede impartirle energía a un satélite usando un efecto de **impulso gravitacional**, gracias al movimiento de un cuerpo celeste.

## 2.1. La primera Ley de Kepler

Los planetas se mueven en órbitas elípticas. Para excentricidades  $0 \leq \epsilon \leq 1$  tenemos elipses.

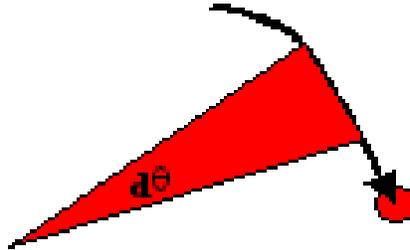
## 2.2. La segunda Ley de Kepler

La segunda ley de Kepler dice que el área que un cuerpo barre en tiempos iguales es igual.

De hecho

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{2\mu}$$

Es interesante notar que esta ley rige a todas las fuerzas centrales, ya que depende de la conservación de momento angular.



## 2.3. La tercera Ley de Kepler

Sabemos por la segunda ley de Kepler que el periodo de la trayectoria de una elipse y su área están relacionadas

$$A = \frac{p_\theta}{2\mu} \tau$$

Además sabemos que el área de la elipse es  $A = \pi ab$ , con  $a$  y  $b$  como los ejes de la elipse. Dado que podemos definir  $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ , vemos que podemos encontrar  $b$  de la condición

$$\dot{y}(b) = \dot{r} \sin \theta_b + r \dot{\theta} \cos \theta_b = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \theta_b = -\epsilon$$

usando

$$r(t) = \frac{r_o}{1 + \epsilon \cos \theta(t)}$$

Por lo tanto estos se pueden obtener de la trayectoria

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \\ b &= \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{p_\theta}{\sqrt{2\mu|E|}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \tau = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}$$

Pero además sabemos que

$$b = \sqrt{\alpha a} \rightarrow \tau^2 = \left( \frac{2\mu\pi}{p_\theta} \right)^2 (ab)^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3$$

Por lo tanto  $\tau$  no depende de  $p_\theta$ . Esta relación es conocida con la tercera ley de Kepler. Para el caso gravitatorio  $k = GMm$  y

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3 \cong \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad m \ll M$$

### 3. Escatering en una fuerza central

El problema de escatering considera una partícula proveniente del infinito con un parámetro de impacto  $s$ .

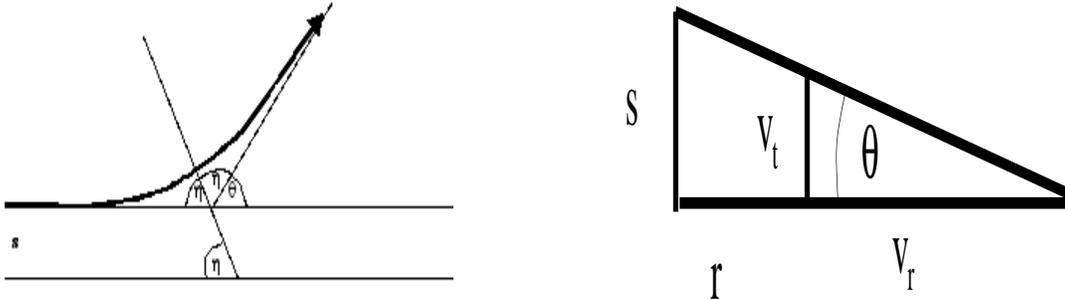


Figura 4: (a) Situación de escatering. (b) Relación del parámetro de impacto.

El parámetro de impacto se puede definir como

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \approx \mu r v_t \approx \mu v s \approx s \sqrt{2\mu E}$$

en el limite ( $r \rightarrow \infty$ ) usando el sistema de coordenadas definido para el origen de la fuerza central, osea  $r = 0$ . Dada una fuerza central, se puede calcular exactamente el ángulo de escatering  $\theta$  como

$$\theta(s, E) = \pi - 2\eta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(s/r^2) dr}{\sqrt{1 - (s/r)^2 - U(r)/E}}$$

donde  $r_{\min}(p_\theta, E)$  corresponde al punto

$$\dot{r} = 0 \quad \rightarrow \quad E = V_{eff} = \frac{p_\theta^2}{2\mu r_{min}^2} + U(r_{min})$$

En general tenemos  $\theta = \theta(s, E)$ , esto tiene sentido ya que la dinámica de una partícula en un potencial efectivo depende del  $p_\theta$  y de  $E$ . De hecho, partículas con pequeños valores de  $s$  experimentan el potencial cercano al origen, mientras que partículas con  $s$  mayor experimentan la parte asintótica del potencial. Es importante notar que tanto  $s$  como la energía  $E$  son positivas. La sección eficaz  $\sigma$  se define como el número de partículas que alcanzan un ángulo sólido de escattering, normalizado por el número de partículas incidentes por unidad de área. Por lo tanto tiene unidad de área. Por lo tanto tenemos que

$$I 2\pi s |ds| = I \sigma d\Omega = I \sigma 2\pi \sin \theta |d\theta|$$

Si la fuerza es no-central, entonces tenemos que agregar un  $d\phi$ . Esta relación implica

$$\sigma(\theta, E) = \frac{s(\theta, E)}{\sin \theta} \left| \frac{ds(\theta, E)}{d\theta} \right|$$

Por ejemplo, para el problema del potencial simple,  $n = 1$ , tenemos que para energías positivas  $\varepsilon > 1$ , con  $k$  repulsivo

$$k = -\frac{q_1 q_2 e^2}{4\pi \varepsilon_0}$$

$$r = \frac{-\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\eta - \pi)} = \frac{\alpha}{\varepsilon \cos(\eta) - 1}$$

con el punto mas cercano correspondiente a  $\eta = 0$ . Es importante notar que escribimos en termino de ángulo  $\eta$ . Con esta definición, tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ \cos(\eta) = \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} \rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \cot \frac{\theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{2Es}{-k}$$

donde hemos usando  $\theta = \pi - 2\eta$ . Con lo cual tenemos que

$$\sigma(\theta, E) = \frac{s(\theta, E)}{\sin \theta} \left| \frac{ds(\theta, E)}{d\theta} \right| = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2E} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Este es el famoso resultado de Rutherford. El problema con esta formula es que la sección eficaz total diverge,

$$\sigma_T(E) = \int d\Omega \sigma(\theta, E) \rightarrow \infty$$

Esto se debe a que no hemos considerado los electrones alrededor del núcleo que cambian la forma del potencial.

**Problema:** Tomemos el potencial

$$U(x) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r^6}$$

Este potencial se muestra en la Fig. 5.

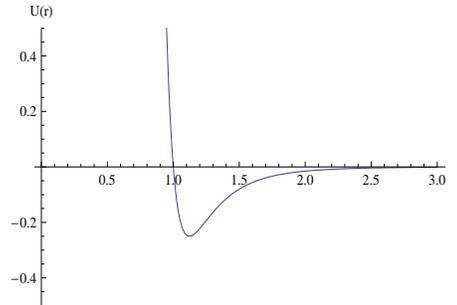


Figura 5:  $U(x)$

Tomemos el caso  $E = 1,5$  (unidades normalizadas). Podemos calcular  $r_{min}(s, E)$  y en forma numérica la integral para  $\theta$  como función de  $s$ , como se muestra en la Fig. 6. Podemos notar que para cada valor de  $\theta$  pueden haber varios valores de  $s$ . Mas aun, en el máximo o mínimo tenemos  $d\theta/ds = 0$  lo que produce un valor infinito en la sección eficaz para ese ángulo (a esto se le denomina “rainbow scattering” o escatering arco-iris). Por lo tanto en general necesitamos cambiar nuestra formula a

$$\sigma(\theta, E) = \sum_i \frac{s_i(\theta, E)}{\sin \theta} \left| \frac{ds(\theta, E)}{d\theta} \right|_i$$

para los diferentes valores de  $s$  que producen el mismo ángulo  $\theta$ . También es importante notar que las soluciones  $\theta < 0$  contribuyen a la sección eficaz para  $|\theta|$ . Además,  $\theta(s_0) = 0$  lo que genera un valor infinito de  $\sigma$  para  $\theta = 0$ , denominado “glory scattering”. Por lo tanto el calculo para  $\sigma$  como función de  $\theta$  no es trivial de realizar.

Vemos en la Fig. 6b, que hay tres rangos de interés

1. Rango 1:  $0 \leq s \leq s_0$  con  $\theta(s_0) = 0$  (“glory scattering”)
2. Rango 2:  $\theta_0 \leq s \leq s_{min}$  donde  $\theta$  es un mínimo (“rainbow scattering”). Lo mismo aplicaría para el caso de un máximo.
3. Rango 3:  $s_{min} \leq s \leq \pi$

Vemos que para  $\theta \leq \theta_{min}$  hay tres contribuciones para  $\sigma(\theta)$ , mientras que para  $\theta > \theta_{min}$ , solo el primer rango contribuye, como se observa en la Fig. 6c. El resultado final para  $\sigma(\theta)$  se muestra en la Fig. 6d.

En la Fig. 7 se muestra los casos  $E = 0,5, 1,0, 2,0, 5,0$ . Además, podemos calcular la sección eficaz total

$$\sigma_T(E) = \int d\theta \sin \theta \sigma(\theta)$$

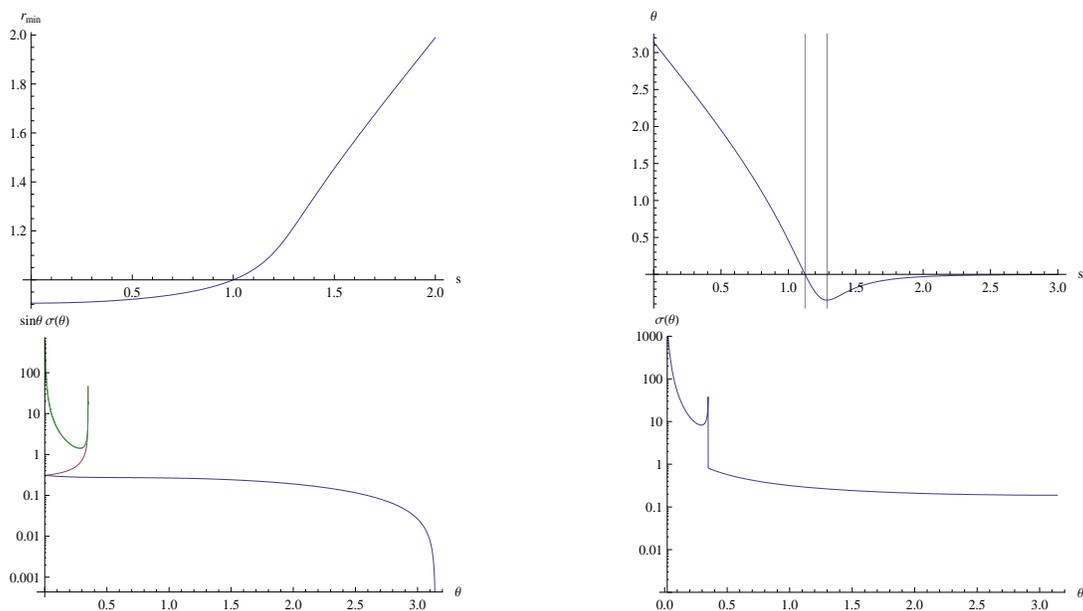


Figura 6: (a)  $r_{min}$ . (b)  $\theta$  donde se aprecian los tres rangos de interés. (c) Las tres contribuciones a  $\sin(\theta)\sigma(\theta)$  correspondientes a los tres rangos de interés. (d) La sección eficaz  $\sigma(\theta)$ . La energía es  $E = 1,5$  (unidades normalizadas).

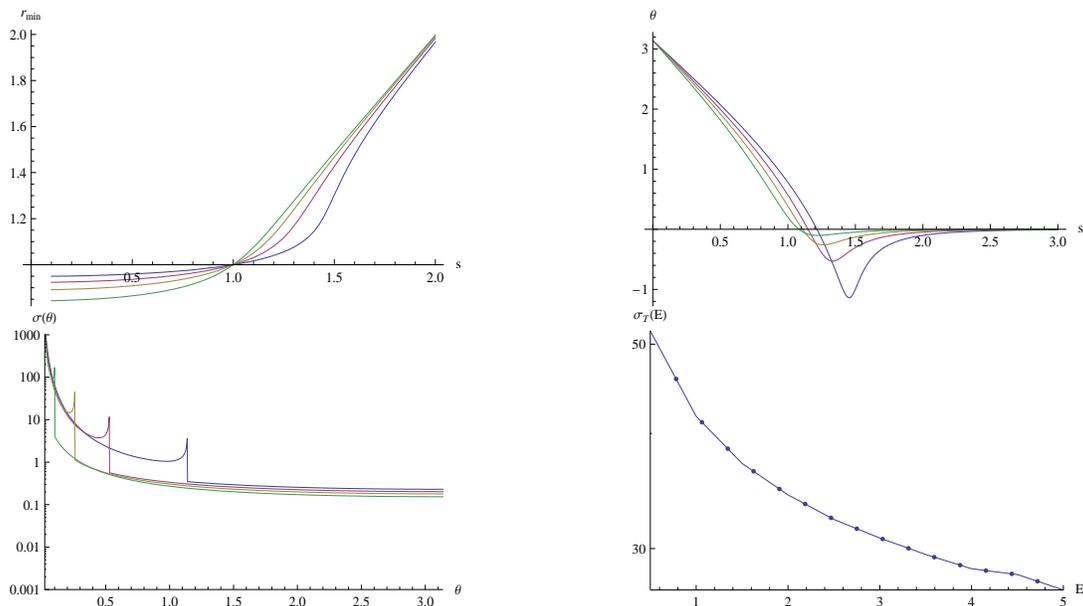


Figura 7: (a)  $r_{min}$ , (b)  $\theta$ . Para energías  $E = 0,5, 1,0, 2,0, 5,0$ . (c) Las secciones eficaces. (d) La sección eficaz total  $\sigma_T(E)$ .

Para calcular  $\sigma$  en casos mas complicados, podemos calcular las trayectorias en forma numérica como se muestra en la Fig. 8a para  $E = 2$  (en unidades normalizadas). Por lo tanto, podemos graficar  $\theta(s)$  para esta energía como se muestra en la Fig. 8b, lo cual es similar al resultado anterior. El procedimiento se continua de la misma forma.

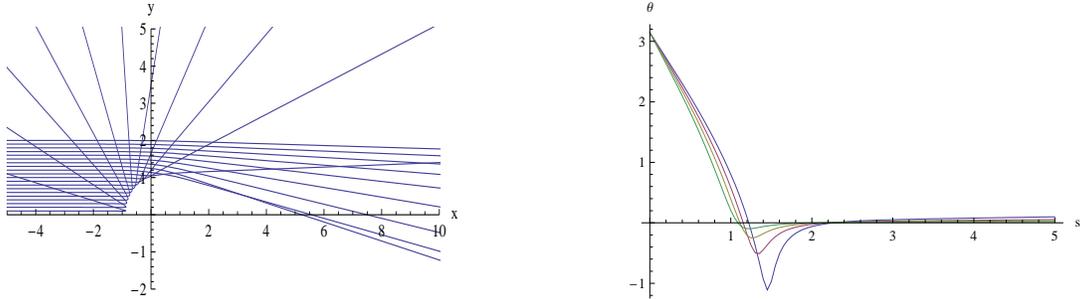


Figura 8: (a) trayectorias, (b)  $\theta$ , para  $E = 2$  (unidades normalizadas)

Si tenemos un potencial que es repulsivo a cortas distancias y atractivo a largas distancias, podemos tener el efecto de que una órbita quede atrapada para ciertos valores de  $s$  y  $E$ , aun cuando la energía sea positiva. Además partículas con parámetro de impacto cercano a este valor orbitaran el centro del potencial varias veces produciendo valores de  $\theta > \pi$  o  $\theta < -\pi$ . Esto implica que de nuevo hay que adaptar nuestra definición de la sección eficaz.

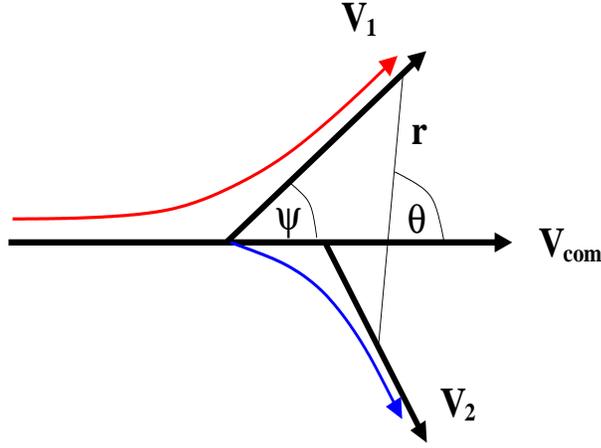
### 3.1. En el Laboratorio

Todo el análisis realizado hasta ahora ha sido con respecto al origen del potencial central. Pero en el laboratorio este origen se mueve como se observa en la figura. Queremos escribir la sección eficaz en termino del ángulo  $\psi$  con respecto al Laboratorio. Podemos relacionar  $\theta$  y  $\psi$  usando las siguientes definiciones.

- $\mathbf{V}$  velocidades del centro de masa en el Laboratorio
- $\mathbf{V}_1$  velocidad de la partícula 1 con respecto al Laboratorio
- $\mathbf{v}_o$  velocidad relativa entre las dos partículas inicialmente
- $\mathbf{v}_r$  velocidad relativa entre las dos partículas después de la colisión.

Usando la transformación

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)\mathbf{V} &= m_1\mathbf{v}_o \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v}_r = \frac{m_1\mathbf{v}_o}{m_1 + m_2} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v}_r$$



asumiendo que la velocidad del centro de masa es constante, con lo cual podemos relacionar

$$\left. \begin{aligned} V_1 \cos \psi &= \frac{m_1 v_o}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_r}{m_1 + m_2} \cos \theta \\ V_1 \sin \psi &= \frac{m_2 v_r}{m_1 + m_2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \cos \psi = \frac{\rho + \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2}}$$

Esta transformación depende del parámetro

$$\rho = \frac{m_1 v_o}{m_2 v_r}$$

que relacionan a las velocidades relativas entre las dos partículas antes y después de la colisión. Dada la conservación de partículas entre los dos sistemas de referencia

$$I 2\pi \sigma_L(\psi, E_o) \sin \psi |d\psi| = I 2\pi \sigma(\theta, E) \sin \theta |d\theta|$$

obtenemos inmediatamente

$$\sigma_L(\psi, E_o) = \sigma(\theta, E) \frac{\sin \theta |d\theta|}{\sin \psi |d\psi|} = \sigma(\theta, E) \frac{|d \cos \theta|}{|d \cos \psi|} = \sigma(\theta, E) \frac{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos \theta}$$

Por supuesto, hay que transformar tanto  $E \rightarrow E_o$  como  $\theta \rightarrow \psi$  al sistema de referencia del Laboratorio usando la ecuación de arriba

$$\cos \psi = \frac{\rho + \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2}}$$

La energía de la partícula con respecto al origen del potencial y al Laboratorio es

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_o^2 \\ E_o &= \frac{1}{2} m_1 v_o^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_o$$

Además la energías cinéticas antes y después están relacionadas por

$$T_o = \frac{1}{2}m_1v_o^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}v_o^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2$$

### 3.2. Colisión elástica

En una colisión elástica tenemos que la energía cinética se conserva,  $T = T_o$ , por lo cual tenemos inmediatamente que  $v_r = v_o$  con  $\rho = m_1/m_2$ . Para el caso  $m_1 = m_2$ , lo que implica  $\rho = 1$ , tenemos que

$$\psi = \frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \sigma_L(\psi, E_o) = 4 \cos \psi \sigma(2\psi, \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_o) \quad \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

### 3.3. Colisión inelástica

Para este caso definimos el  $Q$  de la reacción en la cual no se conserva la energía cinética,

$$\left. \begin{array}{l} Q = T - T_o \\ \frac{1}{2}\mu v_o^2 = \frac{1}{2}\mu v_r^2 - Q \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{T_o}}}$$

**Problema:** Considere el caso del potencial

$$U(x) = \frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r^6}$$

Utilizando la sección eficaz derivada, para diferentes valores de  $m_1/m_2$  y  $q = Q/T_o$ , podemos ver la figura

$$\sigma_L(\psi, E_o) = 4 \cos \psi \sigma(2\psi, \frac{E_o}{2}) \quad \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

podemos construir ver la sección eficaz elástica e inelástica en la Fig. 9

## 4. Problema de 3 cuerpos $\rightarrow$ caos

Supongamos que tenemos 2 estrellas en órbita circular. Si tomamos como origen el centro de masa, podemos definir la trayectoria de las estrellas como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= r_o \{\cos \omega_o t, \sin \omega_o t, 0\} \\ \mathbf{r}_2(t) &= -r_o \{\cos \omega_o t, \sin \omega_o t, 0\} \end{aligned}$$

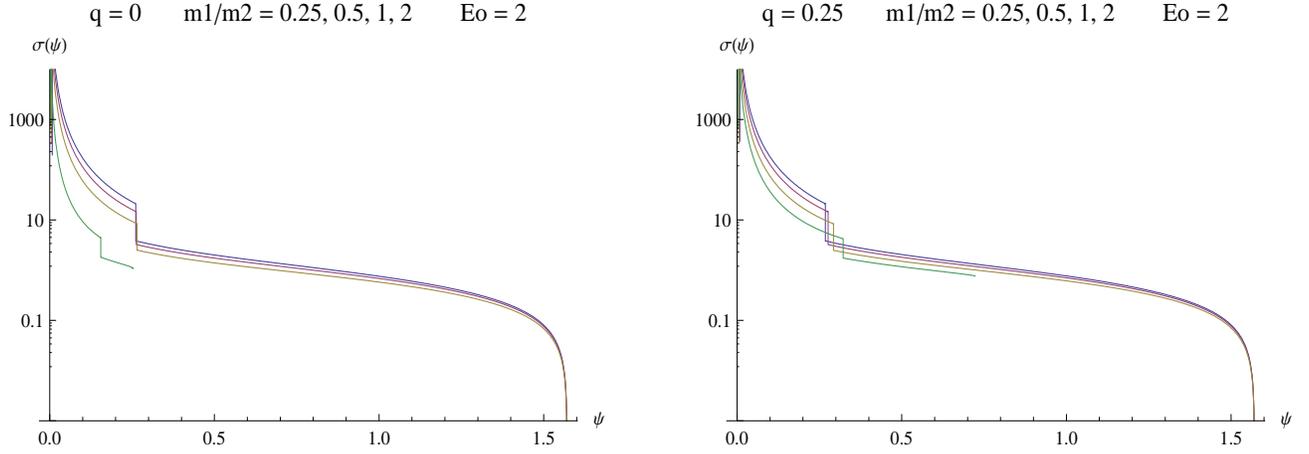


Figura 9: Sección eficaz (a) elástica  $q = 0$  e (b) inelástica  $q = 0,25$ , para  $m_1/m_2 = 0,25, 0,5, 1, 2$ .

De que dependen los valores  $r_o$  y  $\omega_o$ ? Asumamos que tenemos un planeta entre estas estrellas y podemos escribir las ecuaciones de movimiento. Lo interesante es que hay trayectorias periódicas y trayectorias caóticas.

Otra forma de hacer este problema es transformar a un sistema de coordenadas en rotación, similar a lo hecho en el capítulo 2. Como ya sabemos, la fuerza que siente el planeta en este sistema de referencia debe incluir las fuerzas ficticias centrífuga y de coriolis. En termino del Lagrangiano queremos hacer la transformación del sistema inercial  $K$  (coordenadas  $\mathbf{r}$ ) y sistema no-inercial  $\bar{K}(t)$  (coordenadas  $\bar{\mathbf{r}}$ )

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_o t & -\sin\omega_o t & 0 \\ \sin\omega_o t & \cos\omega_o t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\bar{\mathbf{r}} = \{x_1(t), x_2(t), 0\}$$

Las velocidades en el sistema de coordenadas  $K$  y  $\bar{K}(t)$  están relacionadas por

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\bar{\mathbf{r}}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}) + \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}$$

Notemos que

$$\mathbf{A}[\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}] = \text{Det}(\mathbf{A}) [(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{A}\bar{\mathbf{r}})] = [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\bar{\mathbf{r}})]$$

ya que  $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ . Por lo tanto

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m (\dot{\bar{\mathbf{r}}}^2 + 2\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}})^2)$$

Además, dado que  $\mathbf{r}^T \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}^T \bar{\mathbf{r}}$ , podemos encontrar

$$|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

Por lo tanto el Lagrangiano tiempo independiente es

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{\bar{\mathbf{r}}}^2 + 2\dot{\bar{\mathbf{r}}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}})^2) + \frac{GMm}{\sqrt{(x_1 - x_s)^2 + x_2^2}} + \frac{GMm}{\sqrt{(x_1 + x_s)^2 + x_2^2}}$$

donde  $\pm x_s$  es la posición de las estrellas. Uno puede usar las ecuaciones de Euler-Lagrange y obtener el resultado del Capítulo 2 para las fuerzas. Las variables generalizadas son  $(x_1, x_2)$ . Estas transformaciones también se pueden hacer desde el punto de vista de las fuerzas como fue hecho en el capítulo 2, pero es interesante darse cuenta como las dos interpretaciones dan el mismo resultado. Además el tiempo no aparece explícitamente en el Lagrangiano, por lo tanto el Hamiltoniano es una constante del movimiento, lo que implica que en principio hay 3 grados de libertad.

Desde el punto de vista dinámico, tenemos un espacio de fase de 4 dimensiones, aunque en principio hay al menos una constante de movimiento en este espacio de 4 dimensiones. En general se necesitan 3 dimensiones para obtener caos en un sistema dinámico, y en particular este sistema da origen a movimientos caóticos dependiendo de las condiciones iniciales. Si tomamos dos condiciones iniciales muy cercanas  $\bar{\mathbf{r}}_1(t=0) = (\bar{x}(0), 0)$  y  $\bar{\mathbf{r}}_2(t=0) = (\bar{x}(0) + \eta(0), 0)$  separadas por una distancia inicial tenemos las dos trayectorias de la Fig. 10a.

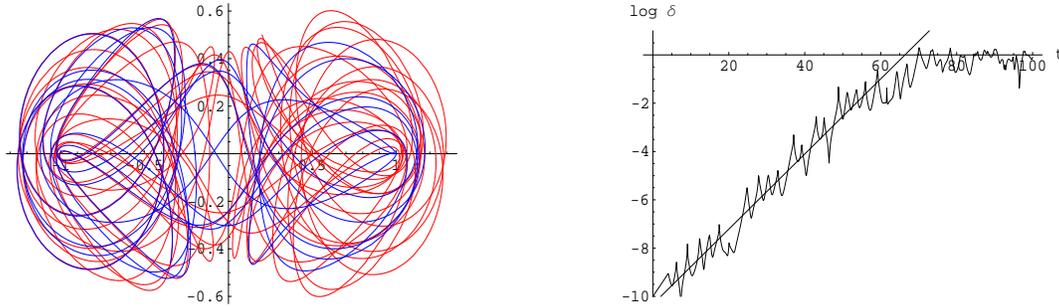


Figura 10: (a) 2 trayectorias separadas inicialmente por  $\eta_0 = 10^{-10}$ . (b) Calculo del exponente de Lyapunov

Lo cual demuestra, por lo menos numéricamente, que existe sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto es lo que definiremos como el caos, donde hay una dinámica determinista con sensibilidad a las condiciones iniciales. Podemos estimar cuan sensible es el sistema para estas condiciones iniciales graficando

$$d(t) = |\bar{\mathbf{r}}_1(t) - \bar{\mathbf{r}}_2(t)| = |\eta(t)|$$

como se muestra en la Fig. 10. Vemos que la distancia aumenta en forma exponencial

$$d(t) \sim d(0)e^{\lambda_{max}t}$$

donde  $\lambda_{max}$  es el máximo exponente de Lyapunov. De la gráfica podemos estimar  $\lambda_{max} = 0,15$ .

Este problema demuestra muchos fenómenos interesantes, como órbitas periódicas estables, órbitas periódicas inestables, caos, etc. Además este problema tiene varios atractores, dependiendo de las condiciones iniciales. Dependiendo de las condiciones iniciales, también tenemos órbitas que se van  $r \rightarrow \infty$ ? Otras órbitas permanecen cerca de uno de los planetas.

## 5. Teorema virial

Definamos la cantidad

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2T$$

Si el sistema es periódico o si las trayectorias permanecen acotadas (tanto en p como en r), tenemos que

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \rightarrow 0$$

para tiempos muy largos. Para sistemas periódicos, esto también funciona para tiempos finitos. Con lo que tenemos el teorema virial

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle$$

Esta relación se usa para construir ecuaciones de estado, que nos permiten cerrar la jerarquía de ecuaciones.

### 5.1. Caso 1: fuerzas centrales

Para un grupo de N partículas que interactúan a través de un potencial central, para lo cual tenemos

$$\begin{aligned} -\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i &= \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} U(r_{i,j}) \\ &= \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} + \sum_{j>i} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} \\ &= \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} + \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_{j,i}}{r_{i,j}} \\ &= \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} - \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_j \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} \\ &= \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_{i,j} \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} \end{aligned}$$

Para el caso especial de

$$U(r_{i,j}) = -\frac{k_{i,j}}{r_{i,j}^n}$$

tenemos finalmente

$$\sum_{i>j} U'(r_{i,j}) \mathbf{r}_{i,j} \cdot \frac{\mathbf{r}_{i,j}}{r_{i,j}} = \sum_{i>j} U'(r_{i,j}) r_{i,j} = nU$$

y por lo tanto

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle$$

lo que es muy importante en dinámica orbital, con  $n=1$ .

## 5.2. Caso 2: Gas ideal

Dada la equipartición de la energía tenemos, con una temperatura  $\tau$ ,

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} nk\tau$$

Para un gas ideal (no interacción entre las partículas), la única interacción es con las murallas que contienen al gas. Estas murallas ejercen una fuerza

$$d\mathbf{F}_i = -\hat{\mathbf{n}}PdA$$

con la normal a la muralla definida hacia el exterior, y con  $P$  como la presión, o fuerza por unidad de área, ejercida. Con esta definición podemos estimar

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{P}{2} \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} dA = \frac{P}{2} \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \frac{3}{2} PV$$

Finalmente obtenemos

$$PV = Nk\tau$$

que representa la ecuación de estado de un gas ideal con temperatura  $\tau$ .