Mecánica: Tareas

1. **Extra crédito:** Encuentre y(x) que optimiza el funcional

$$S = \int_0^1 \left(x^2 + y'(x)^2\right) dx \qquad \text{y}(0) = 0, y(1) = 0$$

con la restricción $\int_0^1 y^2 dx = 2$ usando elementos finitos. Discretice el intervalo y partamos con el ser $(y_n, n = 0, \ldots, N)$ y construya una función de interpolación asumiendo estos valores. Normalice apropiadamente y calcule $S[y_0, y_1, \ldots y_N]$. Ahora use un algoritmo de minimización para encontrar el mínimo de S. El algoritmo debería encontrar le estado base. Compare con el resultado analítico. Luego utilizando un algoritmo de Gram-Schmith encuentre otros estados.

2. **Extra crédito:** Haga una simulación de un proyectil en 2-D con fricción $F = -F_o |v| \vec{v}$. Sabemos que el proyectil sale de x=y=0 y tiene que darle a un objeto en x=L, y=0. Encuentre el ángulo y la velocidad inicial de disparo. Encuentre θ_{max} que maximiza el rango como función de ν. Normalice con respecto al caso $\nu = 0$.

3. **Extra crédito:** Tomemos un proyectil sobre la superficie de la tierra. Escriba las ecuaciones de movimiento en termino de la latitud, longitud y altura.

   a) Sin fricción calcule algunas trayectorias en termino de ángulos iniciales

   b) Repita con fricción. Cambian mucho?

   c) Haga un “shooting method” para calcular los ángulos iniciales del proyectil necesarios para llegar a algún punto sobre la tierra.

4. **Extra crédito:** Encuentre el camino en que un satélite consumiría la menor cantidad de combustible bajo la fuerza de gravedad? Cual es la función $r(\theta)$ que minimiza el gasto en combustible para llegar de $r_1(\theta_1 = 0)$ a $r_2(\theta_2 = \pi)$.

$$\begin{array}{l} S[r(\theta)] = \int_{M_o}^{M_1} dm = \int_0^{\pi} \dfrac{dm(\theta)}{d\theta} d\theta \\ r(0) = r_o \qquad\qquad r(\pi) = r_1 \end{array}$$

5. **Extra crédito:** Describa el espacio de fase para condiciones arbitrarias del péndulo

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_o^2 \sin\theta = 0$$

y encuentra los puntos de equilibrio y las cuencas de atracción.

6. **Extra crédito:** Tomemos el péndulo forzado con

$$\begin{array}{l} \ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \sin\theta = A\cos\omega t \\ \beta = 0{,}1 \quad A = 2 \quad \omega = 1 \end{array}$$

Integre varias trayectorias y vea a que tipo de sets (atractor) estas trayectorias tienden luego de un transiente usando un mapa estroboscópico, al evaluar θ y su derivada en $\omega t = 2n\pi$. Para estos parámetros deberían haber al menos 2 curvas que tienen la misma frecuencia ω, por lo tanto podemos diferenciar las dos curvas evaluando la velocidad angular cada $t = n2\pi$. Tome muchas condiciones iniciales en el plano $\theta, \dot{\theta}$ y determine cuales tienden a cada atractor (esto se denomina la cuenca de atracción de cada atractor). Son estas cuencas fractales?

7. **Extra crédito:** Tomemos el péndulo forzado con

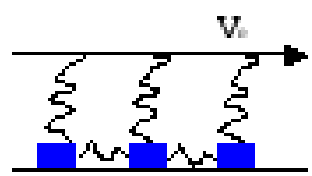
$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + A\cos\omega t \sin\theta =$$
$$\beta = 0{,}1 \quad A = 1{,}2 \quad \omega = 1$$

Integre varias trayectorias y vea a que tipo de sets (atractor) estas trayectorias tienden luego de un transiente usando un mapa estroboscópico, al evaluar θ y su derivada en $\omega t = 2n\pi$. Cuantos atractores hay? Tome muchas condiciones iniciales en el plano $\theta, \dot{\theta}$ y determine cuales tienden a cada atractor (esto se denomina la cuenca de atracción de cada atractor). Son estas cuencas fractales?

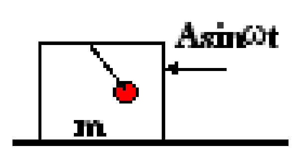
8. **Extra crédito:** Tomemos una montaña rusa de forma circular. Aquí conviene usar θ.

   a) encuentre las ecuaciones de movimiento usando el principio de Hamilton
   b) Encuentre las ecuaciones de movimiento usando Newton
   c) Que tiene que suceder para que el carro no se caiga
   d) Incluya a mano la fuerza de fricción y estime la velocidad inicial que necesita el carro para que no se caiga al dar una vuelta completa al circulo.

9. **Extra acredito:** Terremotos: Supongamos que tenemos la siguiente configuración. Encuentre la ecuación de movimiento para cada masa m$_i$. Los resortes tienen constante k. Pase al continuo y escriba la ecuación de movimiento. En el caso discreto incluya una fricción no-lineal $F = F_o Exp\left[-|v|\right]$. Este modelo se usa extensamente para simular terremotos, en particular dos placas en movimiento relativo. Haga una simulación y vea los terremotos. Use $N = 10$.

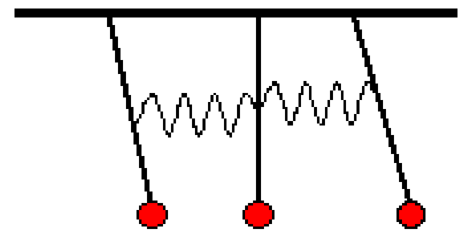


10. **Extra crédito:** Encuentre la ecuación de movimiento de este péndulo forzado. Para $\omega = 1, \omega_o = 1, \beta = 0{,}1, A = 1$ cuantos atractores tenemos? Construya las cuencas de atracción de cada atractor. Elija parámetros normalizado y haga un diagrama de bifurcación. Cuantas soluciones asintóticas encuentra?



11. **Extra crédito:** Tomemos un alambre con la forma $\rho + \sin\alpha\rho$ que rota alrededor de origen con frecuencia ω. hay una constante de fricción ν. Primero encuentre los puntos de equilibrio y vea su estabilidad. Confirme numéricamente que podemos ir saltando de cuenca en cuenca al ir aumentando ω.

12. **Extra crédito:** Tomemos un numero N de péndulos de masa m y largo L, que se mueven en forma transversal a una barra e interactúan con resortes angulares a través de una fuerza $(k(\theta_{n+1} - \theta_n)$, con θ_n como la desviación angular con respecto a la vertical del péndulo n.



   a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para este sistema.

   b) Tomemos la distancia entre péndulos como d y tomemos el limite $d \to 0, m \to 0, k \to \infty$, con $\rho = m/d, \eta = kd$constante y encuentre la ecuación de sine-gordon para el ángulo $\theta(x,t)$.

   c) Demuestre que la ecuación tiene una solución solitónica con $|\alpha| < 1$

$$\theta(x,t) = 4\tan^{-1} Exp\left[\pm\frac{\frac{\omega x}{v} + \alpha\omega t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$$

   Que valor tienen θ, ν y α?

   d) Construya la simulación numérica y encuentre la solución solitónica.

   Útil: $Sin\left[4Tan^{-1}x\right] = -\frac{4x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

13. **Extra crédito** Resuelva la ecuación de onda en una dimensión. Partamos con la condición inicial Gausiana. Implemente condiciones de borde (a) fijas, (b) libres, y (c) naturales (de salida).

14. **Extra crédito** Tomemos la ecuación de Burgers

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = \nu\frac{\partial U^2}{\partial x^2}$$

   Encuentre una solución asintótica $U(x,t) = f(x - vt)$ (solución tipo "shock"). Para el caso $\nu = 0$ demuestre que si discretizamos esta ecuación por diferencias finitas estándares, no podemos encontrar un dt (condición de Courant) para integrar esta ecuación en forma estable (criterio de von Neumman). Utilizando el método numérico de características, demuestre que esta solución existe para diferentes valores de ν. Imponga condiciones de borde $U(x = 0, t) = U_o$ y condiciones de borde de salida para $x = L$. **Nota:** El NDSolve de Mathematica va a tener problemas con esta ecuación.

15. **Extra crédito:** Tomemos el famoso péndulo forzado con los parámetros anteriores $A = 2, \beta = 0{,}1, \omega_o = 1$. Hagamos un diagrama de bifurcación de ω/ω_o y veamos si aparece "phase locking" o "sincronización" (oscilan juntos) para ciertos valores de ω/ω_o. Para esto necesitamos medir la frecuencia efectiva de la oscilación del sistema. Alguna idea? Se ve una escalera del diablo?

16. **Extra crédito:** Trabaje numéricamente las trayectorias para el caso del potencial

$$F(r) = -\frac{k}{r^6} + \frac{\lambda}{r^{12}}.$$

a) Este potencial se usa para describir las interacciones intermoleculares. Elija valores de (k,λ >0) y encuentre órbitas que son atrapadas por este potencial. Son estas órbitas cerradas?

b) Simule numéricamente el ó á ángulo de escatering como función del parámetro de impacto y construya el área eficaz diferencial ara cierta energía. Asuma $k = 1, \lambda = 1$.

c) **Ayuda**: Escriba las ecuaciones de movimiento para este problema y normalice el problema. Tome una condición inicial ($x = -20$, $y = s$, $vx = 1$,$vy = 0$) en termino del parámetro de impacto y vea que valor de θ adquiere numéricamente para grandes $r \sim 20$). Repita para varios valores de s. Cuente el numero de trayectorias que terminan con la variable θ entre θ y $\theta + d\theta$ ($d\theta \sim 0{,}1$ rad) construyendo una estadística.

17. **Extra crédito:** Tres cuerpos, Caos aparece. Tomemos el caso en que tenemos un sistema binario (iguales) de estrellas en órbita circular. Si tomamos como origen el centro de masa, podemos definir la trayectoria de las estrellas como

$$r_1[t] = r_o\{\cos\omega_o t, \sin\omega_o t\}$$

$$r_2[t] = -r_o\{\cos\omega_o t, \sin\omega_o t\}$$

a) De que dependen los valores $r_o \quad \omega_o$.

b) Asumamos que tenemos un planeta entre estas estrellas y escriba las ecuaciones de movimiento. Pero vaya al sistema que rota con las estrellas.

c) Encuentre los puntos de equilibrio. Son estos estables o inestables?

d) Tome varias condiciones iniciales y vea si obtiene trayectorias caóticas (tome dos condiciones iniciales cercanas) y vea si estas se separan rápidamente. Estime el exponente de Lyapunov $\delta(t) = |r_1(t) - r_2(t)| \quad \rightarrow \delta(t) = \delta(0)\, e^{\lambda t}$ para esa condición inicial ($\delta_0 = 10^{-10}$)

e) Una de las variables necesarias para estimar el número de civilizaciones inteligentes en el espacio, es la variable que determina el número de planetas con trayectorias estables (cercano a orbitas circulares). Sabemos el numero de sistemas binarios y podemos simular la situación de que un planeta sea estable en esta nebulosa planetaria donde se formo este sistema binario. Tome muchas condiciones iniciales con $dr(0)/dt = 0$ y determine si el planeta tiende a una orbita estable o no. Varíe este valor para diferentes condiciones iniciales y haga un plot de que condiciones iniciales produce trayectorias caóticas y cuales no. Osea grafique el exponente de Lyapunov.

f) Con esto estime la probabilidad de que si el sistema forma un planeta, este tenga una orbita estable.

18. **Extra crédito:** Tome ($N \sim 1000$) partículas de igual masa m_0 que interactúan a través de la fuerza gravitatoria, y simule un cluster de estrellas. Evolucione este cluster y estime

a) si el teorema Virial aplica

b) calcule el coeficiente de evaporación

c) la distribución de velocidades y energía

d) pongamos una partícula de masa $m/m_0 = 0{,}1$ (esta partícula no afecta a las partículas del cluster)y veamos que le pasa a la energía de esta partícula en el tiempo.

e) Tiene sentido esto en termino de la intuición que dice que este planetoide debería adquirir una gran energía ya que por equipartición de energía debería adquirir la energía de las estrellas.

f) Estime el coeficiente de difusión en este cluster mandando varias masas con diferentes condiciones iniciales

19. **Extra crédito:** Hagamos el problema de escatering caótico

   a) donde tenemos 3 círculos duros. Dada una posición inicial y un ángulo de invidencia ver entre cuales de las pelotas sale. Hay tres direcciones de salida.

   b) asumamos un potencial

   $$V(x,y) = x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

   c) Calcule el tiempo de escatering y el ángulo de escatering.

20. **Extra crédito:** Tomemos un gas de N esferas duras de tamaño R.

   a) Asumamos que las colisiones son elásticas. En (a) 1-D, (b) 2-D, (c) 3-D estime los parámetros de la colisión.

   b) Determine la distribución asintótica de las energías de este gas en (a) 1-D, (b) 2-D, (c) 3-D. Es la distribución de Boltzmann? Asuma un sistema periódico.

21. **Extra crédito:** Tomemos un gas de N esferas duras de tamaño R.

   a) Asumamos que incluimos un baño termal en los bordes, cosa que el componente perpendicular de la velocidad en los bordes es hecha aleatoria durante la colisión. Haga el caso en que la distribución se asume (a) uniforme y (b) termal. Cual es la distribución final.

   b) usando una distribución termal, parta con T alta y empiece a bajar T. Se ve el fenómeno de la condensación?

   c) Con la energía suficientemente alta estima la relación entre la presión, la densidad y la temperatura. Es esto lo esperable?

22. **Extra crédito:** Tomemos un gas de N partículas que interactúan con el potencial de Leanard-Jones en 3-D

   a) Determine la distribución asintótica de las energías de este gas. Es la distribución de Boltzmann? Asuma un sistema periódico.

   b) Asumamos que incluimos un baño termal en los bordes, cosa que el componente perpendicular de la velocidad en los bordes es hecha aleatoria durante la colisión. Haga el caso en que la distribución se asume (a) uniforme y (b) termal. Cual es la distribución final.

   c) usando una distribución termal, parta con T alta y empiece a bajar T. Se ve el fenómeno de la condensación?

   d) Estime la distribución de los clusters que se forman como función de T

23. **Extra crédito:** Tomemos un gas de N partículas que interactúan con el potencial de Leanard-Jones en 3-D

   a) Con la energía suficientemente alta estima la relación entre la presión, la densidad y la temperatura. Es esto lo esperable? Podemos decir que este es un problema de entropía extensible?

b) Tsalis hace un argumento que la entropía no debería ser extensible, o por lo menos permite estimar cuan no extensible es. Esto tiene implicaciones para la ecuación de estado. Alguna idea?

24. **Extra crédito:** Tomemos 2 partículas que interactúan con el potencial de Leanard-Jones.

    a) calcule el área eficaz diferencial? Como se calcularía el área eficaz total?

    b) estime la energía necesaria para romper el enlace

    c) Estime la probabilidad de captura como función de la energía del sistema

25. **Extra crédito:** Asumamos un sistema con un campo magnético $B = B_o\hat{z}$. Calculemos el "phase bunching".

    a) asumiendo que tenemos un potencial central entre las partículas.

    $$V = \frac{k}{r}$$

    b) Para que k uno esperaría una radiación coherente? y para que una radiación incoherente. Haga la simulación y demuestrelo.

    c) En la mecánica cuántica en materiales se asume que los electrones tiene un potencial de localización proporcional a $\rho = |\Psi|^2$. Usando este potencial de localización, estime el "phase bunching".

26. **Extra crédito:** Asumamos un campo magnético

    $$\vec{B} = B_o\hat{z} + B_x \sin(\frac{2\pi x}{L_x})\cos(\frac{2\pi z}{L_z})$$

    con $B_o >> B_x$

    a) escale las ecuaciones de movimiento

    b) grafique las lineas de campo

    c) grafique trayectorias numéricas

    d) encuentre las trayectorias de las partículas a 1er y 2do orden en los parámetros pequeños. Aquí aparecen lo que se llama "invariantes adiabáticos" que son constantes a 1er y 2do orden en la perturbación.

27. **Extra crédito:** Muestra las posibles movimientos de un satélite con excentricidad $\epsilon = 0{,}0, 0{,}1, 0{,}5$ donde $I_1 = I_2 = 2I_3$.

28. **Extra crédito:** Muestre las posibles movimientos de dos asteroides, cada uno es asumido como una forma diatomic.

29. **Extra crédito:** Muestre las posibles movimientos de dos asteroides que tienen la forma de una elipse de revolución de radios $a = 2b$ y $a = \alpha b$ (con $\alpha \geq 1$).

30. **Extra crédito:** Muestre las posibles movimientos de dos dipolos que interactúan eléctricamente.

31. **Extra crédito: (Este problema es publicable)**. El problema de la fricción.

    a) Clásicamente considere una masa $M >> m$ colisionando con masas m de un gas en 1-D que tiene una distribución Maxweliana caracterizada por una temperatura T. Usando colisiones elásticas estime la fuerza de fricción como función de la velocidad v de la masa M.

    b) En general este análisis asume que la sección eficaz es el área transversal de la masa M. Cuando v es similar a la velocidad del sonido un shock se forma. Que restricción impone esto sobre nuestro sistema?

    c) repita el análisis asumiendo que la velocidad v es relativista.

    d) que restricción impone la no formación de shocks

32. **Extra crédito: (Este problema es publicable)**. El problema movimiento browniano.

    a) Einstein asumió que un cuerpo en un medio se comportaba como

    $$m\dot{v} = -\nu v + R$$

    b) Donde R es una función aleatoria que representa las colisiones del medio. Asumiendo que R es una función estocástica, estime la evolución de $< v^2 >$ en este sistema.

    c) Asumiendo que esta distribución es térmica, encuentre la relación con T.

    d) En general nosotros vimos que ν no es constante con v y por lo tanto, debería ser mas razonable utilizar

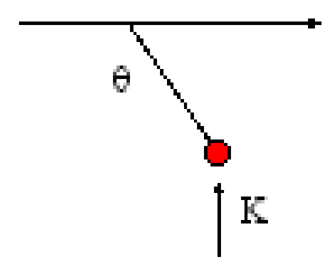
    $$m\dot{v} = R$$

    e) donde R representa las colisiones elásticas del gas con una distribución termina. Encuentre la evolución de $< v^2 >$ en este sistema. Aquí puede ser interesante utilizar diferenciales ya que $M >> m$.

33. **Extra crédito:** Considerar la colisión entre hard spheres en forma relativista y clásicamente.

    a) Hacer el calculo analítico para la colisión binaria

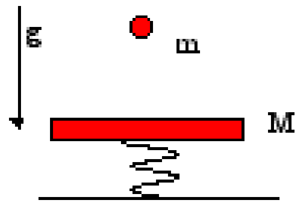
    b) Hacer la simulación y ver que distribución se forma? Es la misma que para el caso clásico?



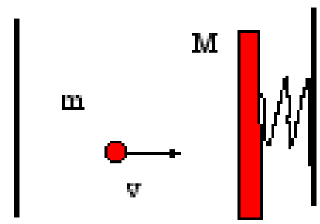
34. **Extra Crédito** (kicked rotor) Describa el kicked rotor con gravedad e integre las ecuaciones de movimiento. Repita los gráficos de θ vs K hecho en clase para diferentes valores de K/mg.

35. **Extra Crédito** (teoría de ensambles): Siga numéricamente un ensamble de trayectorias para el péndulo (incluya los dos lados de la separatriz). Muestre el ensamble de trayectorias en un par de instantes. Estime gráficamente o numéricamente si el volumen de este ensamble se conserva en el tiempo.

36. **Extra Crédito** (caotic bouncing) Describa el mapa de este sistema en el limite $M >> m$ que relaciona las velocidades entre choques. La energía se conserva? Normalice el tiempo y grafique de la fase θ vs v en cada colisión para diferentes condiciones iniciales de la masa m.



37. **Extra Crédito** (Fermi sistem) Describa el mapa de este sistema que relaciona las velocidades de m entre choques. Normalice el tiempo y grafique la sección de superficie de la fase θ vs v en cada colisión para diferentes condiciones iniciales de la masa m.Se ven toros de KAM?



38. **Extra Crédito** para el problema del resorte tomemos el limite de un resorte supermasivo. haga simulaciones. Se ven toros de KAM? Tomemos también el limite de la amplitud $A \sim 0$. Se ve algo interesante? .

39. **Extra Crédito** Escriba el mapa para el "double kicked rotator" y encuentra algunas trayectorias. Determine el numero de atractores y sus cuencas.

40. **Extra Crédito** Considere el "kicked rotator" pero con fricción y un torque constante. Repita el análisis del problema anterior.

41. **Extra Crédito** Determine el numero de soluciones caóticas como función K del " kicked pendulum"

42. **Extra Crédito** Estime el coeficiente de difusión $D(K)$ del " kicked pendulum"