2.1. Guía 2

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Considere

   a) $P_1 = \{0, 1, 1{,}5, 2, 3, 3{,}3\}$ *b*) $P_2 = \{-2, -0{,}5, 1, 3, 4\}$ *c*) $P_3 = \{-\sqrt{2}, \pi/4, 1, \sqrt{3}\}$

   P_1, P_2 y P_3 son particiones de ciertos intervalos. Para cada una de ellas:

   a) Determine el intervalo del que es partición.
   b) Decida si la partición es o no regular.
   c) Encuentre la norma $||P||$ de la partición (el mayor ancho de entre los subintervalos determinados por P).
   d) Exprese y calcule las sumas superiores e inferiores para la función $f(x) = x^2$.
   e) Encuentre refinamientos de estas particiones que tengan norma 0,5.

2. Demuestre que si f es una función acotada en un intervalo $[a, b]$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la partición regular P_n de $[a, b]$, entonces $U(f, [a, b]) = \text{ínf}\{S(f, P_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y $L(f, [a, b]) = \sup\{s(f, P_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

3. Calcule las sumas superiores e inferiores para la función f en el intervalo indicado usando una partición regular en 4 subintervalos.

   a) $f(x) = 2x + 3, \ [1, 5]$ *b*) $f(x) = \sqrt{x}, \ [0, 3]$ *c*) $f(x) = x^3 - 3x, \ [-2, 2]$

4. Determine si es o no integrable en el intervalo $[1, 5]$, y cuanto vale la integral, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\forall\, x \in \mathbb{R}\, f(x) = 3$.

5. Demuestre que toda función constante en un intervalo es integrable en él y exprese su integral en términos del valor constante de la función y de los extremos del intervalo.

6. Asuma que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\forall\, x \in \mathbb{R}\, f(x) = x + 3$ es integrable en $[1, 4]$. Calcule sus sumas parciales y con ellas calcule la integral. Puede ser útil considerar el ejercicio 2

7. Asumiendo que f y g son funciones integrables en un intervalo $[a, b]$, demuestre que la función $f + g$ es integrable en $[a, b]$. Para ello, exprese las sumas superiores e inferiores en términos de las sumas superiores e inferiores de f y de g, y analice el comportamiento de los supremos e ínfimnos involucrados.