## 1.4. Guía 1

Cálculo II Cs. Exactas 2010

1. Suponga que $f$ y $g$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

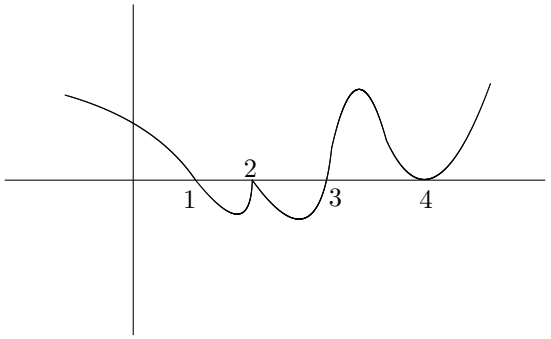
2. Si para una funci ón $f$ definida en un intervalo $[a, b]$ existe $\alpha > 1$ tal que $\forall\, x, y \in [a, b]$ $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ entonces $f$ es continua en $[a, b]$. Trabaje un poco más y demuestre que $f$ es derivable en $]a, b[$, que su derivada es nula en $]a, b[$, y entonces $f$ es constante en $[a, b]$.

3. Si $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ es continua en su dominio y derivable en el interior de su dominio, y $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f'} = L \in \mathbb{R}$, entonces

   *a)* $\forall\, c > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x + c) - f(x)) = cL$ *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$

4. Si $f$ y $g$ son continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, entonces existe $c \in ]a, b[$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

5. La figura muestra la gráfica de la <u>derivada</u> de $f$. Marque todos los puntos en que se asumen los máximos y mínimos locales de $f$, indicando si es máximo o si es mínimo local.




6. Analice completamente (incluyendo concavidad) cada una de las siguientes funciones. Además, encuentre el supremo y el ínfimo en los intervalos indicados (o demuestre que no existe).

   *a)* $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.
   *b)* $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $\mathbb{R}$.
   *c)* $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[0, \infty)$.
   *d)* $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.
   *e)* $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $[-1, 1/2]$.
   *f)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ en $[0, 5]$.
   *g)* $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $\mathbb{R}$.
   *h)* $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $[-1/2, 1]$.
   *i)* $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $[-1, 1/2]$.
   *j)* $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en $\mathbb{R}$.

7. Determine un intervalo en torno a $x = 4$ donde la función $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}(x - 5)^2}{4}$$

   tenga una función inversa (local) $f = g^{-1}$ y calcule la derivada $f'(\frac{1}{2})$.

8. Demuestre que:

*a)* $(\text{Arcsen}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

*b)* $(\text{Arccos}(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

*c)* $(\text{Arctan}(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

*d)* $(\text{Arcsec}(x))' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

9. Demuestre que si $f$ derivable en un intervalo $I$ y para todo $x \in I$ se cumple $f'(x) < -4$, entonces $f$ tiene inversa derivable en $I$.

10. Calcule los siguientes límites, usando la regla de l'Hôpital si se puede.

*a)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x^2)}$

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x + x^3)}{x + \text{sen}(x^2)}$

*c)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}\big(x^2 + \text{sen}(x)\big)}$

*d)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$

*e)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan(x)}{\text{sen}(x^2)}$

*f)* $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x-\pi}}$

*g)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{\text{sen}^2(x)}$

*h)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\text{sen}(x + \sqrt{x})}$